Homologikus dimenzió

Tregele Máté

2025. December

1. Bevezetés

1.1. Definíció. Egy R gyűrűnek a projektíven illetve injektíven definiált nagy finitisztikus dimenziója az alábbi módon definiálható:

$$\text{Fin-pro}\, R = \sup\{\operatorname{pd} M \mid M \in R\text{-Mod},\ \operatorname{pd} M < \infty\},$$

$$\text{Fin-inj}\, R = \sup\{\operatorname{pd} M \mid M \in R\text{-Mod},\ \operatorname{id} M < \infty\}.$$

Ehhez hasonlóan a kis finitisztikus dimenzió:

$$\text{fin-pro}\, R = \sup\{\operatorname{pd} M \mid M \in R\text{-mod},\ \operatorname{pd} M < \infty\},$$

$$\text{fin-inj}\, R = \sup\{\operatorname{pd} M \mid M \in R\text{-mod},\ \operatorname{id} M < \infty\},$$

ahol R-mod a végesen generált R-modulusok kategóriáját jelöli.
Mivel fin-inj A = fin-pro A^{op}, ezért a kettő közül elég csak az egyikkel foglalkozni, így ha nem mondjuk külön, hogy injektíven vagy projektíven definiált finitisztikus dimenzióról van szó, akkor általában a projektíven definiáltról beszélünk, és ilyenkor ezt Fd és fd szokta jelölni.

1.2. Sejtés. *(Finitisztikus dimenzió sejtés)*
Legyen A egy véges dimenziós algebra. Ekkor:

1. $\operatorname{fd} A = \operatorname{Fd} A$.
2. $\operatorname{fd} A < \infty$.

Az első sejtésre született ellenpélda, de a második pontra még nyitott a kérdés. Az előző kutatómunkám[4] alatt láttunk speciális algebra osztályokat amelyekre igaz a sejtés, pl. radikál köb = 0 esetlén, monomiális algebrákra, ls triviálisan igaz a sejtés reprezentáció véges algebrákra. Azonban a finitisztikus dimenzió konkrét kiszámolása, illetve annak eldöntése, hogy fin-inj A és fin-pro A között milyen reláció van, általában szintén nehéz.
A finitisztikus dimenzió korlátozására és kiszámolására mindenféle új invariánsok bevezetése egy lehetséges út. Gélinas erre vezette be egy algebra kihurkolási szintjét, fin-pro $A \leq \operatorname{del} A$.
A kutatómunkám során 3 cikkel foglalkoztam, melyek ezt a kihurkolási szintet viszgálják. A Gélinas-cikk[2] a kihurkolási szint alapja, itt vezette be a fogalmat. A Ringel[5] cikk a kutatómunka fő anyaga, ahol Nakayama-algebráknál ad a finitisztikus dimenzióra kiszámolási módszert, és bebizonyítja hogy Nakayama-algebrákra igaz, hogy fin-inj A = fin-pro A. Végül kitekintésként szolgál az Igusa-Guo cikk[3], mely a kihurkolási szint további formáit definiálja és vizsgálja.

2. A kihurkolási szint

2.1. Definíció. Ha M egy modulus, legyen ΩM az első syzygy-je (a projektív fedő $PM \to M$ magja) és ΣM az első cosyzygy-je (az injektív burok $M \to IM$ komagja). Egy modulus *kihurkolási szintje* (angolul: delooping level) $\operatorname{del} S$ a legkisebb $d \geq 0$ szám, amire $\Omega^d S$ direkt összeadandója $P \oplus \Omega^{d+1} M'$-nek, ahol M' és P végesen generált modulusok és P projektív. Egy A algebra kihurkolási szintje $\operatorname{del} A = \max_S \operatorname{del} S$, ahol S végigfut az egyszerű modulusok izomorfiatípusain.
Duálisan lehet definiálni egy modulusra, majd egy algebrára az alábbi mennyiséget (angolul: desuspending level)
$\operatorname{des} M$ a legkisebb $d \geq 0$ szám, melyre $\Sigma^d S$ direkt összeadandója $I \oplus \Sigma^{d+1} M'$-nek, ahol M' és P' végesen generált modulusok és I injektív, továbbá $\operatorname{des} A = \max_S \operatorname{des} S$.

A cél az alábbi tétel:

2.2. Tétel. *Ha A egy Nakayama-algebra, akkor*

$$\text{fin-pro}\, A = \text{fin-inj}\, A = \operatorname{del} A$$

és speciálisan

$$\text{fin-pro}\, A = \max_S \min\{\operatorname{pd} S, \operatorname{pd} IS\},$$

ahol S végigfut az egyszerű modulusokon.

A 2.2 tételhez előbb a kihurkolási szintre vonatkozó állítások következnek, majd belátjuk, hogy ezen állítások feltételei igazak a Nakayama-algebrákra.

2.3. Állítás (Gélinas)**.** *Legyen M egy végesen generált modulus. Ha létezik egy N (nem feltétlenül végesen generált) modulus véges $d \geq 1$ injektív dimenzióval úgy, hogy $\operatorname{Ext}^d(M, N) \neq 0$ akkor $d \leq \operatorname{del} M$.*

2.4. Következmény. $\text{Fin-inj}\, A \leq \operatorname{del} A$.

A 2.3 Állítás duálisából következik az is, hogy:

2.5. Következmény. $\text{Fin-pro}\, A \leq \operatorname{des} A$

2.6. Állítás. *Ha X részmodulusa a végesen generált Y modulusnak, akkor*

$$\operatorname{del} X \leq \operatorname{pd} Y.$$

Az előző állítás és annak duálisának következménye az alábbi tétel:

2.7. Tétel. *Tegyük fel hogy minden S egyszerű modulus részmodulusa egy végesen generált M_S modulusnak, melynek véges a projektív dimenziója. legyen $d = \max_S \operatorname{pd} M_S$. Ekkor*

$$\text{Fin-inj}\, A \leq \operatorname{del} A \leq d \leq \text{fin-pro}\, A.$$

Továbbá:

$$\text{Fin-pro}\, A \leq \operatorname{des} A \leq d' \leq \text{fin-inj}\, A,$$

ahol $d' = \max_S \operatorname{id} N_S$, ahol N_S egy végesen generált modulus, melynek faktora S és $\operatorname{id} N_S$ véges.

2.8. Következmény. *Tegyük fel hogy minden S egyszerű modulus részmodulusa egy végesen generált M_S modulusnak, melynek véges a projektív dimenziója, továbbá minden S faktora egy végesen generált N_S modulusnak, melynek véges az injektív dimenziója Legyen $d = \max_S \operatorname{pd} M_S$, $d' = \max_S \operatorname{id} N_S$. Ekkor:*

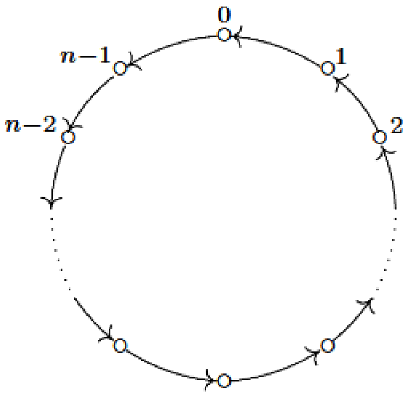
$$\text{fin-pro}\, A = \text{fin-inj}\, A = \text{Fin-pro}\, A = \text{Fin-inj}\, A = \operatorname{del} A = \operatorname{des} A = d = d'.$$

3. Nakayama-algebrák kihurkolási szintje

3.1. Definíció. Egy A algebrát akkor hívunk Nakayama-algebrának, ha minden direkt felbonthatatlan projektív A-modulus és minden direkt felbonthatatlan injektív A-modulus egysoros. Ha A Nakayama-algebra, akkor A^{op} is Nakayama-algebra.
A Nakayama-algebrák jellemzése a [1] könyvből:

3.2. Tétel. *Egy A összefüggő algebra Nakayama-algebra akkor és csak akkor ha a Q_A gráfja az alábbiakból az egyik:*

- *Egy egyenes út:* $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow ... \leftarrow n-1 \leftarrow n$
- *Egy kör:*



3.3. Tétel. *Legyen A egy összefüggő Nakayama-algebra, és legyen M egy felbonthatatlan A-modulus. Ekkor létezik egy P felbonthatatlan projectív A-modulus és egy t egész úgy, hogy $M \cong P/\operatorname{rad}^t P$. Speciálisan A reprezentáció-véges.*

2020-ban Sen megmutatta, hogy $\operatorname{fin-inj} A = \operatorname{fin-pro} A$ Nakayama-algebrákra. A Gélinas által bevezetett kihurkolási szinttel azonban Ringel egy sokkal rövidebb bizonyítást tudott adni erre, továbbá a finitisztikus dimenzió konkrét kiszámolására is adott egy módszert Nakayama-algebrák esetén.
A Nakayama-algebrák modulus struktúráját kihasználva nem-triviális módon el lehet jutni a következő tételhez:

3.4. Tétel. *Legyen A egy Nakayama-algebra és S egy egyszerű modulus. Ekkor $\operatorname{pd} S$ páratlan vagy $\operatorname{pd} IS$ páros. (Speciálisan S és IS közül legalább az egyiknek véges a projektív dimenziója.)*

Ekkor a 2.8 tétel alapján Nakayama-algebrákra a következőt kapjuk:

3.5. Tétel. *Legyen A Nakayama-algebra. Ha S egyszerű, legyen $M_S = S$, ha S-nek véges a projektív dimenziója, különben legyen $M_S = IS$. Legyen $d = \max_S \operatorname{pd} M_S$*

$$\operatorname{fin-pro} A = \operatorname{fin-inj} A = \operatorname{del} A = d.$$

3.6. Példa. Legyen az G a következő gráf:
$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl, "\gamma"'] & \\ 1 \arrow[rr, "\alpha"'] & & 2 \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$
Továbbá legyen

$$I = (\beta\gamma, \gamma\alpha\beta) \lhd KG$$

Ekkor $A = KG/I$ algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusai $P_1 = \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}, P_2 = \begin{matrix}2\\3\end{matrix}, P_3 = \begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix},$

direkt felbonthatatlan injektív modulusai pedig $I_1 = \begin{matrix}3\\1\end{matrix}, I_2 = \begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}, I_3 = \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$

Az egyszerű modulusok projektív felbontásai:

$$0 \to P_2 \to P_1 \to 1 \to 0$$
$$... \to P_3 \to P_1 \to P_3 \to P_2 \to 2 \to 0$$
$$... \to P_3 \to P_1 \to P_3 \to 3 \to 0$$

Vagyis $\operatorname{pd} 1 = 1$, $\operatorname{pd} 2 = \operatorname{pd} 3 = \infty$. Az előző tétel szerint $M_1 = S_1$. S_2 injektív burka I_2, S_3 injektív burka I_3. mivel $I_2 = P_3$ és $I_3 = P_1$, ezért $\operatorname{pd} M_2 = \operatorname{pd} M_3 = 0$. Az előző tétel szerint tehát fin-pro $A = \max_S \operatorname{pd} M_S = 1 = \operatorname{del} A = \max_S \operatorname{del} S$.
$\operatorname{del} S_1 = 1$, hiszen S_1 nem lehet syzygy (nincs semelyeik felbonthatatlan projektív talpában), és $\Omega S_1 = P_2$ projektív. $\operatorname{del} S_2 = \operatorname{del} S_3 = 0$, hiszen $S_2 = \Omega \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ és $S_3 = \Omega S_2$. Tehát $\operatorname{del} A = 1$ ami megegyezik a tétel alapján kijött számmal.

4. Kitekintés

Mivel a kihurkolási szám mindig egy felső becslést ad a finitisztikus dimenzióra, ezért hasznos lehet a finitisztikus dimenzió sejtéshez. Azonban vannak olyan példák, ahol a finitsztikus dimenzió véges, de a kihurkolási szám végtelen, így a sejtés megoldásához nem elég.
Igusa és Guo cikke[3] a kihurkolási szám különböző változatait vezeti be, amiben a derivált kihurkolási szám és a szubderivált kihurkolási szám jobb felső becslést ad, mint a sima kihurkolási szám. Jelenleg nem ismerünk olyan példát, ahol a derivált kihurkolási szám ne lenne egyenlő a finitisztikus dimenzióval, ami azért lenne pozitív, mert a derivált kihurkolási számot könnyebb kiszámolni, mint a finitisztikus dimenziót.

Hivatkozások

[1] Ibrahim Assem, Daniel Simson és Andrzej Skowroński: *Elements of the representation theory of associative algebras: Techniques of representation theory.* Cambridge University Press, 2006.

[2] Vincent Gélinas: "The depth, the delooping level and the finitistic dimension". *Advances in Mathematics* 394 (2022), 108052. old.

[3] Ruoyu Guo és Kiyoshi Igusa: "Derived delooping levels and finitistic dimension". *Advances in Mathematics* 464 (2025), 110152. old.

[4] Tregele Máté: *Homological Dimensions.* 2024.

[5] Claus Michael Ringel: "The finitistic dimension of a Nakayama algebra". *Journal of Algebra* 576 (2021), 95–145. old.