

Finitisztikus dimenzió

Tregele Máté

2026. január 9.

Definíció. Legyen R gyűrű.

- $\text{Fin-pro } R = \sup\{\text{pd } M \mid M \in R\text{-Mod}, \text{pd } M < \infty\}$
- $\text{fin-pro } R = \sup\{\text{pd } M \mid M \in R\text{-mod}, \text{pd } M < \infty\}$

Injektív dimenzióval definiálható az injektív változat.

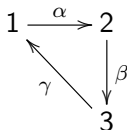
Sejtés. Legyen A véges dimenziós algebra.

- 1 $\text{fd } A = \text{Fd } A$
- 2 $\text{fd } A < \infty$

Definíció. Egy algebra Nakayama-algebra, ha minden direkt felbonthatatlan projektív és injektív modul egysoros.

Tétel. Legyen A egy összefüggő Nakayama-algebra, és legyen M egy felbonthatatlan A -modulus. Ekkor létezik egy P felbonthatatlan projektív A -modulus és egy t egész úgy, hogy $M \cong P/\text{rad}^t P$. Speciálisan A reprezentáció-véges.

Legyen G az alábbi gráf:



Legyen

$$I = (\beta\gamma, \gamma\alpha\beta) \triangleleft KG, \quad A = KG/I.$$

Ekkor A egy Nakayama-algebra.

Példa - Összes felbonthatatlan modulus

$A = KG/I$ algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusai

$$P_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}, P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}, P_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix},$$

Az előző tételt végigfuttatva a projektíveken azt kapjuk, hogy a nem-egyszerű, nem-projektív felbonthatatlan modulusok:

$$P_1/\text{rad}^2 P_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, P_3/\text{rad}^2 P_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}.$$

Példa - Projektív feloldás

A felbonthatatlan modulusok projektív feloldásai:

$$0 \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

$$\dots \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 0$$

$$\dots \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow 2 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \rightarrow 0$$

$$\dots \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow 3 \rightarrow 0$$

Tehát $\text{fin-pro}(A) = 1$

Injektív modulusok

A direkt felbonthatatlan injektív modulusai $l_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $l_2 = \begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}$, az

injektív feloldások pedig:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix} \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

$$0 \rightarrow 3 \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix} \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

$$0 \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix} \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

$$0 \rightarrow 2 \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix} \rightarrow 2 \rightarrow \dots$$

Tehát $\text{fin-inj}(A)$ is 1.

Legyen M egy modulus.

- ΩM : az első syzygy (projektív fedő magja)

Definíció. Egy modulus kihurkolási szintje $\text{dell } M$ a legkisebb $d \geq 0$, amelyre

$$\Omega^d M \text{ direkt összeadandója } P \oplus \Omega^{d+1} M'$$

ahol P projektív.

Egy algebra kihurkolási szintje:

$$\text{dell } A = \sup_S \text{dell } S$$

ahol S egyszerű modulus.

Tétel (Ringel). Legyen A Nakayama-algebra. Ha S egyszerű, legyen $M_S = S$, ha S -nek véges a projektív dimenziója, különben legyen $M_S = IS$. Legyen $d = \max_S \text{pd } M_S$

$$\text{fin-pro } A = \text{fin-inj } A = \text{dell } A = d.$$

- $\text{pd } S_1 = 1$, $\text{pd } S_2 = \text{pd } S_3 = \infty$, tehát $M_1 = S_1$, $M_2 = I_2 = P_3$, $M_3 = I_3 = P_1$. Tehát $\text{fin-pro } A = \max_S \text{pd } M_S = 1$.
- $\text{dell } S_1 \neq 0$, mert nem lehet syzygy, hiszen nincs egyik projektív felbonthatatlan talpában. Viszont $\Omega S_1 = P_2$ projektív, tehát $\text{dell } S_1 = 1$.
- $S_2 = \Omega_1^3$, $S_3 = \Omega S_2$, tehát $\text{dell } S_2 = \text{dell } S_3 = 0$.
- Tehát $\text{dell } A = 1$.

Definíció. Egy modulus k -adik kihurkolási szintje k -dell M a legkisebb $d \geq 0$, amelyre

$$\Omega^d M \text{ direkt összeadandója } P \oplus \Omega^{d+k} M'$$

ahol P projektív.

Az eddigi példánkon:

- k -dell $S_1 = 1$ minden k -ra, mert S_1 sose syzygy és ΩS_1 projektív
- S_2 és S_3 projektív feloldásából észrevehetjük, hogy $S_3 = \Omega^{2n} S_3$ és $S_3 = \Omega^{2n+1} S_2$, szóval k -dell $S_3 = 0$ minden k -ra.
- dell $S_2 = 0$ már láttuk. S_2 nem 2. syzygy ezért k -dell $S_2 \neq 0$ $k > 0$ -re. De $\Omega S_2 = S_3$, amiből következik, hogy k -dell $S_2 = 1$ minden $k > 0$ -ra.

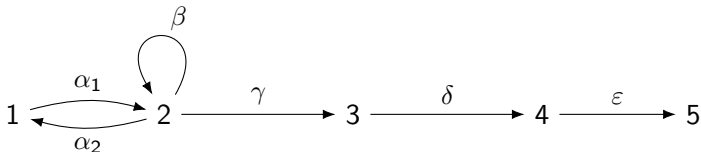
Definíció. Legyen M egy Λ -modulus, k és k' pozitív egészek. Ekkor a k -effektív kihurkolási szintje M -nek:

$$k\text{-edell } M = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \text{id } X = n + k - 1 + k' > n + k - 1 - \text{ből} \\ \text{következik, hogy } \text{Ext}_{\Lambda}^{n+k'}(M, X) = 0\}$$

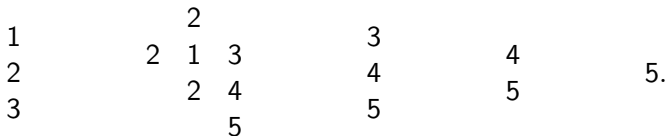
Állítás. $\text{Findim } \Lambda^{\text{op}} = \text{edell } \Lambda$.

Lemma. $k\text{-edell } M \leq k\text{-dell } M$.

Vegyük G gráfnak az alábbi:



Legyen $I = (\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta, \alpha_1\gamma\delta, \beta^2, \beta\gamma, \beta\alpha_2, \alpha_2\alpha_1\gamma)$. Legyen $\Lambda = KG/I$.
Ekkor a direkt felbonthatatlan projektív modulusok:



1		2		3		4		5.
2	2	1	3					
3		2	4	5				
			5					

- $\text{dell } S_2 = \text{dell } S_3 = \text{dell } S_5 = 0$, mivel projektívek talpában vannak.
 $\text{dell } S_1$ és $\text{dell } S_4$ nem 0.
- $\Omega S_4 = S_5$ projektív, tehát $\text{dell } S_4 = 1$.
- Projektív feloldások elejét felírva látható, hogy $\Omega S_1 = \frac{2}{3}$ nem syzygy.
 $\text{dell } S_1 \neq 1$.
- $\Omega_3^2 = S_2 \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{4}{5} \oplus \frac{4}{5}$ projektív, $\frac{1}{2}$ és S_2 pedig direkt összeadandó $\Omega^k S_2$ -ben. Tehát $\text{dell } S_1 = 2$, $\text{dell } \Lambda = 2$
- Azonban megmutatható erre az algebrára, hogy $\text{Findim } \Lambda^{op} = 1$

Definíció. Legyen M egy Λ -modulus, $k > 0$ egész. A k -szub-derivált kihurkolási szintje (sub-derived-delooping level) M -nek

k -sub-ddell $M = \inf\{m \mid \exists n \leq k \text{ és egy egzakt sor mod } \Lambda\text{-ban,}$
ami $0 \rightarrow M \rightarrow D_0 \rightarrow D_1 \rightarrow \cdots \rightarrow D_{n-1} \rightarrow D_n \rightarrow 0$
alakú, ahol $(k-i)$ -dell $D_i \leq i + m$, $i = 0, 1, \dots, n\}$.

Definíció. Legyen M egy Λ -modulus, $k > 0$ egész. A k -derivált kihurkolási szintje (derived delooping level) M -nek

k -ddell $M = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \leq m \text{ és egy egzakt sor mod } \Lambda\text{-ban,}$
ami $0 \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0$
alakú, ahol $(i+k)$ -dell $C_i \leq m - i$, $i = 0, 1, \dots, n\}$.

Tétel. $\text{Findim } \Lambda^{op} \leq \text{sub-dell } \Lambda \leq \text{dell } \Lambda.$

Tétel. $\text{Findim } \Lambda^{op} \leq \text{ddell } \Lambda \leq \text{dell } \Lambda.$

- Össze hasonlítható-e k -sub-ddell Λ és k -ddell Λ ? Egyelőre csak olyan példát ismerünk, amelynél $\text{ddell } \Lambda < \text{sub-ddell } \Lambda$.
- Igaz-e, hogy $\text{ddell } \Lambda = \text{Findim } \Lambda^{op}$? Egyelőre nincs ellenpélda.
- Lehet-e más algebra osztályokra bizonyítani a finitisztikus dimenzió sejtést a ddell vagy sub-ddell segítségével? Könnyebb kiszámolni, mint a findim-et.

A kutatómunka során MI eszközöket használtam a következőkre:

- Latex formázás
- Egyenlet vagy ábra képéből Latex kód gyártása

- [1] Ibrahim Assem, Daniel Simson és Andrzej Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras: Techniques of representation theory*. Cambridge University Press, 2006.
- [2] Vincent Gélinas. “The depth, the delooping level and the finitistic dimension”. *Advances in Mathematics* 394 (2022), 108052. old.
- [3] Ruoyu Guo és Kiyoshi Igusa. “Derived delooping levels and finitistic dimension”. *Advances in Mathematics* 464 (2025), 110152. old.
- [4] Claus Michael Ringel. “The finitistic dimension of a Nakayama algebra”. *Journal of Algebra* 576 (2021), 95–145. old.

Köszönöm a figyelmet!

Köszönöm a figyelmet!