

Idempotens osztógyűrűk

Metzger Ábris

Témavezető:

Dr. Ágoston István

December 19, 2025

1 Bevezetés

A BSc-szakdolgozatomban a Neumann-reguláris gyűrűket tárgyaltam. Közismert eredmény, hogy ezen gyűrűk Jacobson-radikálja 0. Viszont a bizonyításban használt tulajdonság egy természetes gyengítése is elég ehhez. Ezen gyengébb feltételnek elegettevő gyűrűket fogjuk a továbbiakban idempotens osztógyűrűknek nevezni.

Első körben pár egyszerű állítást mondunk ki a gyűrűosztályról, ezek nagy része úgy keletkezett, hogy Goodearl Neumann-reguláris gyűrűkről szóló [1] könyvében szereplő állításokat vizsgáltunk, hogy teljesülnek-e idempotens osztógyűrűkre.

Majd megmutatjuk, hogy az Idempotens osztógyűrűk osztálya határozottan bővebb a Neumann-reguláris gyűrűk osztályánál. Ehhez egy hasonló gyűrűosztályról, a Zorn-gyűrűkről szóló [4] cikket hívunk segítségül. A Zorn-gyűrűk több ekvivalens jellemzése van mi Kaplansky [2] könyvében szereplő definíciót használjuk.

Majd végül megpróbálunk az idempotens osztógyűrűk alapján modulusosztályokat definiálni, ehhez a [3] cikkből nyerünk ihletet.

A beszámoló során modulus alatt általában balmodulust fogunk érteni, és feltesszük, hogy a gyűrűk egységelemesek.

2 Állítások a gyűrűosztályról

Definíció 1. Egy R gyűrű jobb (bal) idempotens osztógyűrű, ha $\forall 0 \neq x \in R \exists y \in R$, hogy $0 \neq xy = (xy)^2$ (illetve $0 \neq yx = (yx)^2$).

Tétel 2. R pontosan akkor jobb idempotens osztógyűrű, ha bal idempotens osztógyűrű.

Bizonyítás. Ha R jobb I.O., akkor $0 \neq x \in R$ esetén $\exists y \in R$, hogy $0 \neq xy = xyxy$. Vizsgáljuk xyx -et.

$(xyx)^2 = xyxyxyx = y(xy)^3x = yxyx$. Tehát yxy balról idempotensbe szorozza x -et. Már csak arról kell megbizonyosodnunk, hogy $yxyx \neq 0$. $0 \neq xy = (xy)^3 = xyxyxy = x(yxyx)y$. Tehát, ha $yxyx = 0$ lenne, akkor $xy = 0$, amiről feltettük, hogy nem 0. $\square$

Megjegyzés 3. Tehát innentől kezdve elég idempotens osztógyűrűkről beszélnünk, a definíció jobbal szimmetrikus. Továbbá vegyük észre, hogy yxy jobbról és balról is nem nulla idempotensbe szorozza x -et. Tehát feltehető, hogy ugyanaz az elem szorozza jobbról és balról idempotensbe x -et. Vegyük észre, hogy erősebb állítást bizonyítottunk, még hozzá azt, ha egy adott elemet jobbról idempotensbe tudunk szorozni, akkor balról is.

Megjegyzés 4. Sőt, ennél több is igaz, még hozzá, ha $x \in R$ esetén $\exists y, z \in R$, hogy $yxz = yxzyxz$, vagyis x két oldalról idempotensbe szorozható, akkor a fentiek alapján $xzyxzy = (xzyxzy)^2$, vagyis x jobbról is idempotensbe szorozható.

Alapvető példák: Minden Neumann-reguláris gyűrű I.O.

Most vizsgáljuk mely gyűrűelméleti konstrukciókra zárt a fogalom.

$\mathbb{Q}$ I.O., hiszen minden nem 0 elemnek van inverze, de $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ nem I.O., hiszen ebben a gyűrűben az 1 az egyetlen nem 0 idempotens de nincs mindennek inverze. Ami azt jelenti, hogy az I.O.-k osztálya nem zárt a részgyűrű képzésre.

Állítás 5. Ha $I \triangleleft R$ kétoldali ideál R I.O.-ban, akkor I maga is I.O..

Bizonyítás. $0 \neq x \in I$ esetén $\exists y \in R$, hogy $0 \neq xy = (xy)^2$. De mint tudjuk, ilyenkor $z = yxy$ esetén $0 \neq xz = (xz)^2$, de $z \in I$, hiszen I kétoldali ideál. $\square$

Állítás 6. I.O. faktora szintén I.O.

Bizonyítás. Ha $xy = (xy)^2$, akkor $(x+I)(y+I) = ((x+I)(y+I))^2$, hiszen a műveletek jól definiáltak a mellékosztályokon. $\square$

Állítás 7. *Ha R gyűrűben, $I \triangleleft R$ kétoldali ideál I.O., valamint a vele vett faktor R/I szintén I.O., akkor R is I.O. Azaz I.O. osztálya zárt a bővítésre.*

Bizonyítás. Vegyünk tetszőleges $0 \neq x \in R$ elemet ehhez, találunk megfelelő elemet, amely idempotensbe szorozza.

Ha $x \in I$, akkor kész vagyunk, hiszen I I.O. Különben $x + I \neq I$. Ekkor $\exists y + I \in R/I$, hogy $xy + I = xyxy + I \Rightarrow xyxy - xy \in I$. Ha $xyxy - xy = 0$, akkor kész vagyunk. Tehát mivel I I.O., így $\exists z \in I$, hogy $(xyxy - xy)z = ((xyxy - xy)z)^2$. De ekkor $x(yxy - y)z = (x(yxy - y)z)^2$. Tehát $(yxy - y)z$ idempotensbe szorozza x -et. $\square$

Most pedig következzen egy karakterizáció.

Tétel 8. *R gyűrűre ekvivalensek a következők:*

(1) *R idempotens osztógyűrű.*

(2) $\forall I \leq R$ balideálra, $\exists L \leq R$, balideál, hogy $L \leq I$, és L generálható idempotens elemmel. (Azaz minden balideálban van direkt összeadandó.)

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2) :

$0 \neq x \in I$ esetén $\exists y \in R$, hogy $xy = (xy)^2$, de I balideál, így $xy \in I$. Ekkor $L = xyR$ egy idempotens által generált balideál, mely része I -nek.

(2) $\Rightarrow$ (1) :

Tetszőleges $0 \neq x \in R$ elemre vegyük az általa generált balideált, azaz $xR \leq R$ -et. Ekkor a feltétel alapján $\exists e \in R$ idempotens, hogy $eR \leq xR$. Ekkor $e \in eR \Rightarrow e \in xR \Rightarrow \exists y \in R$, hogy $xy = e$. $\square$

Megjegyzés 9. $e^2 = e$ miatt $e \in eR$ akkor is teljesül ha R nem 1-elemes, tehát nem használjuk az 1-elemességet.

Állítás 10. *Idempotens osztógyűrű centrumában nicsen nem 0 nilpotens elem.*

Bizonyítás. Indirekt módon tfh.: $\exists 0 \neq x \in Z(R)$ nilpotens elem, hogy $x^n = 0$. Ekkor $\exists y \in R$, hogy $0 \neq xy = (xy)^2 = (xy)^n = x^n y^n = 0$, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés 11. *Kommutatív idempotens osztógyűrűnek nincsen nem 0 nilpotens eleme. (Hiszen ennek centruma az egész gyűrű.)*

Állítás 12. *Ha R I.O., és $e \in R$ idempotens, akkor eRe szintén I.O.*

Bizonyítás. Legyen $0 \neq x \in eRe$. Ekkor $x = exe$. Mivel $0 \neq exe \in eRe$, így $\exists y \in R$, hogy $0 \neq xey = (xey)^2 = exeyexey$.

Most belátjuk, hogy $eye \in eRe$ megfelelő választás lesz. $exeye = exeye$. $(exeye)^2 = exeyeexeye = exeyeexeye = exeye$, hiszen $exey$ -ről tudjuk, hogy idempotens. Most vegyük észre, hogy $exeye$ "megtalálható" szorzótényezőként $(xey)^2$ -ben, ami feltevésünk alapján nem 0, tehát $exeye$ sem lehet 0.

□

Most emlékezzünk vissza az egységreguláris gyűrűk definíciójára:

Definíció 13. *Egy R gyűrű egységreguláris, ha $\forall a \in R$ gyűrűelemhez $\exists u \in R$ egység, hogy $aua = a$.*

A Neumann-reguláris gyűrűkhöz hasonlóan az egységreguláris gyűrűket is megpróbálhatjuk általánosítani, a következő módon.

Definíció 14. *Egy gyűrű egység idempotens osztógyűrű, ha $\forall a \in R$ esetén $\exists u \in R$ egység, hogy $au = auau$ idempotens.*

Állítás 15. *Az egység idempotens osztógyűrűk, pontosan az egységreguláris gyűrűk.*

Bizonyítás. Világos, hogy egy egységreguláris gyűrű, egység idempotens osztógyűrű, hiszen $\forall a \in R$ esetén $\exists u$ egység, hogy $aua = a$, de ekkor $au = auau$ idempotens.

Illetve minden egység idempotens osztógyűrű egységreguláris, hiszen $\forall a \in R$ esetén $\exists u \in R$ egység, hogy $au = auau$ idempotens, de ekkor jobbról u^{-1} -el átszorozva megkapjuk, hogy $aua = a$.

□

Tehát ekvivalens definíciót adtunk az egységreguláris gyűrűkre.

Állítás 16. *Ha egy idempotens osztógyűrű Noether, akkor féligegyszerű*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy R egy Noether idempotens osztógyűrű. Most pedig indirekten tegyük fel, hogy létezik $M \leq R$ balideál, hogy M nem direkt összeadandó R -ben. Ekkor mivel R idempotens osztógyűrű, így létezik M -ben nem nulla direkt összeadandó. Legyen K a maximális direkt összeadandó M -ben, ami létezik, hiszen R Noether. Ekkor $\exists L \leq R$, hogy $R = K \oplus L$, tehát $M = K \oplus (L \cap M)$. Igen ám, de ekkor $L \cap M$ -ben is létezik nem nulla direkt összeadandó N ,

valamint S , hogy $R = N \oplus S$. De ekkor N L -ben is direktösszeadandó, és $L = N \oplus (S \cap L)$. Tehát $R = K \oplus N \oplus (S \cap L)$, ahol $K \leq K \oplus N \leq M$, ami ellentmondás, mivel N nem nulla, illetve K maximális. Tehát minden balideál direkt összeadandó, azaz a gyűrű féligegyszerű. $\square$

3 Példák

Mivel az idempotens osztógyűrűk a Neumann-reguláris gyűrűk általánosítása, így természetes elvárás, hogy mutassunk egy olyan idempotens osztógyűrűt, mely nem Neumann-reguláris. Ehhez a [4] cikkben fellelhető példa alapján konstruáljuk meg a következő gyűrűt:

Definíció 17.

$$R(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{x \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q} \mid \text{véges sok index kivételével } x_i \in \mathbb{Z}\}$$

Állítás 18. *A fent definiált $R(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ idempotens osztógyűrű, de nem Neumann-reguláris.*

Bizonyítás. Világos, hogy a gyűrű idempotens osztógyűrű, hiszen egy nem 0 elemének válasszuk ki az első nem 0 koordinátáját, és szorozzuk meg azzal az elemmel, melynek ezen koordinátája a koordináta inverze, a többi pedig 0. Ez az elem egy olyan elem, melynek egyik koordinátája 1, a többi 0, ami idempotens.

Az is világos, hogy a gyűrű nem Neumann-reguláris, hiszen válasszuk a $(2, 2, \dots)$ elemet (melynek minden koordinátája 2). Ahhoz, hogy ennek az elemnek legyen kváziinverze, koordinátánként kéne kváziinverz, melyekből csak véges sokat tudunk használni, a gyűrű definíciója miatt. $\square$

Megjegyzés 19. *Illetve a fenti példát általánosítani lehet Neumann-reguláris gyűrűkre, mégohozzá, ha L egy Neumann-reguláris gyűrű, hogy $\exists K \leq L$, hogy K nem Neumann-reguláris, akkor a hasonlóan definiált $R(L, K)$ idempotens osztógyűrű lesz, de nem Neumann-reguláris, a fenti állással analóg indoklással.*

Továbbá fellelhető egy további gyűrűosztály, a Zorn-gyűrűk osztálya.

Definíció 20. *Egy R gyűrű Zorn-gyűrű, ha tetszőleges $x \in R$ nem nilpotens elemhez létezik $y \in R$, hogy xy idempotens.*

A definícióból teljesen világos, hogy az idempotens osztógyűrűk a Zorn-gyűrűk speciális esete. Tehát kéne egy olyan Zorn-gyűrű, mely nem idempotens osztógyűrű.

Szerencsére ilyet nem nehéz mutatni.

Állítás 21. $\mathbb{Z}_4$ ilyen.

Bizonyítás. A 11. állítás miatt világos, hogy $\mathbb{Z}_4$ nem idempotens osztógyűrű, hiszen kommutatív, és 2 nilpotens. De Zorn-gyűrű, hiszen 1 és 3 egyaránt invertálható.

□

4 Újabb kérdések, gyűrű, és modulusosztályok

Már láttuk két ekvivalens jellemzését az idempotens osztógyűrűknek, most pedig következzen pár moduluselméleti megközelítés, általánosítás.

Vizsgálhatjuk a következő két tulajdonságot:

Definíció 22 (1. Tulajdonság). *Legyen R gyűrű, $\forall M$ bal R -modulusra $\forall L \leq M$ részmodulusban van direktösszeadandó.*

Definíció 23 (2. Tulajdonság). *R gyűrű, $\forall M$ bal R -modulus esetén $\text{End}_R(M)$ idempotens osztógyűrű.*

Világos, hogy az 1. Tulajdonsággal rendelkező gyűrűk idempotens osztógyűrűk, hiszen ${}_R R$ mint önmaga felett vett bal modulus esetén a feltétel éppen az ekvivalens megfogalmazásunk direktösszeadandókkal (7. Tétel).

Az is világos, hogy a 2. Tulajdonságból szintén következik, hogy R idempotens osztógyűrű, hiszen ismét ${}_R R$ -et vizsgálva, az egységelemesség miatt, $\text{End}_R(R)$ izomorf R -el.

Hivatkozások

- [1] K.R. Goodearl. *Von Neumann Regular Rings*. Monographs and studies in mathematics. Pitman, 1979. ISBN: 9780273084006. URL: <https://books.google.hu/books?id=wgHvAAAAAAAJ>.
- [2] I. Kaplansky. *Rings of Operators*. Mathematics 337 a, summer 1955. Department of Mathematics, University of Chicago, 1955. URL: <https://books.google.hu/books?id=jh7vAAAAAAAJ>.
- [3] Gangyong Lee, Syed Rizvi, and Seliste Cosmin. “Modules Whose Endomorphism Rings are Von Neumann Regular”. In: *Communications in Algebra* 41 (Nov. 2013). DOI: 10.1080/00927872.2012.700979.
- [4] W. Nicholson. “Lifting Idempotents and Exchange Rings”. In: *Transactions of The American Mathematical Society - TRANS AMER MATH SOC* 229 (May 1977). DOI: 10.2307/1998510.