

Egyéni kutatómunka beszámoló

Félcsoportok: Rees-konstrukció, inverz monoidok; Félcsoportalgebra
centruma

Jörg Máté Áron

2026. január 09.

- 1 Motiváció
- 2 Félcsoport elmélet: a) Rees konstrukció; b) Teljesen 0-egyszerű félcsoportok, c) Inverz monoidok
- 3 Centrum $\mathbb{C}[S]$ félcsoportalgebrában (Rukolaine)

A kutatás célja a csoportok, illetve félcsoportok reprezentációelméletének összehasonlítása. Mivel a reprezentációk csoport-/félcsoportalgebra fölötti modulusok, ezért ehhez a félcsoportalgebrák tanulmányozása elengedhetetlen.

Ehhez a dolgozat végén szereplő Rukolaine tétellel el is jutunk, amiben bizonyos félcsoportok $\mathbb{C}$ feletti félcsoportalgebráinak centrumát határozzuk meg. Ezt meglezően pedig a teljes dolgozat félcsoportelmélettel foglalkozik, megvizsgálva fontosabb félcsoport osztályokat, különös tekintettel az inverz félcsoportokra, hiszen talán ezek állnak a legközelebb a csoportok fogalmához, és az említett Rukolaine tétel is rájuk vonatkozik.

Rees-mátrix félcsoportok

G csoport, I, J indexhalmazok, $P = (p_{j,i}) \in (G \cup \{0\})^{J \times I}$ szendvicsmátrix". Alaphalmaz: $(I \times G \times J) \cup \{0\}$, és

$$(i, g, j)(u, h, v) = \begin{cases} (i, g p_{j,u} h, v) & \text{ha } p_{j,u} \neq 0, \\ 0 & \text{ha } p_{j,u} = 0. \end{cases}$$

Az így definiált csoportot $\mathcal{M}^0(G, I, J, P)$ -vel jelöljük.

Teljesen 0-egyszerű félcsoporthok

Definíció

$e, f \in E(S)$, $e \leq f$, ha $ef = fe = e$. Egy S félcsoport teljesen 0-egyszerű, ha $0 \in S$ nincs nemnulla, valódi ideálja, és az idempotens elemeinek a fenti részben rendezés szerint van legkisebb eleme.

Rees tétel

S pontosan akkor **teljesen 0-egyszerű**, ha izomorf egy $\mathcal{M}^0(G, I, J, P)$ Rees mátrix félcsoporttal, ahol P minden oszlopa és sora tartalmaz nemnulla elemet.

Definíció

Egy monoid M **inverz**, ha minden $m \in M$ -hez létezik *egyértelmű* m' úgy, hogy

$$mm'm = m, \quad m'mm' = m'.$$

Tétel

M inverz monoid $\iff M$ reguláris ($\forall a \in S \exists x : axa = a$) és az idempotensek kommutálnak.

Definíció

G csoport csoportalgebrája a $\mathbb{K}$ test felett

$$\mathbb{K}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in \mathbb{K} \right\},$$

ahol véges kivétellel mindegyik a_g "együttható" nulla. A szorzás pedig

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g &= \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g, \\ \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) &= \sum_{h \in G} \left(\sum_{xy=h} a_x b_y \right) h. \end{aligned}$$

$\mathbb{K}(S)$ félcsoportalgebra ugyanígy definiálható.

Csoportalgebrák centruma

Ismert, hogy csoportalgebrák centruma:

$$Z(\mathbb{K}[G]) = \langle \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_r \rangle, \quad \hat{C}_i = \sum_{g \in C_i} g,$$

ahol C_i -k konjugáltosztályok. Tehát $Z(\mathbb{K}[G]) \cong \mathbb{K}^r$.

Vegyünk egy S inverz monoidot és az idempotensein a már korábban bevezetett részben rendezést. e maximális preidempotense $f < e$, ha a részben rendezésre maximális.

Definiáljuk $\mathbb{K}[S]$ egy elemét e idempotensre:

$$\sigma(e) = e + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} e_i,$$

ahol $e_1, \dots, e_k$ az e maximális elő-idempotensei”.

Ez minden csoportelemmel kommutál.

Csoportelemek egy $\mathcal{K}$ konjugáltosztályára definiáljuk

$$K_{\mathcal{K}} = \sum_{a \in \mathcal{K}} a \sigma(aa^{-1}).$$

Tétel

$$K_{\mathcal{K}} \in Z(\mathbb{K}[S])$$

Továbbá legyenek $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ az S véges inverz monoid konjugáltosztályai.

Tétel

$\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ lineárisan függetlenek.

Tehát így $Z(\mathbb{K}[S])$ egy bázisát adják.



A. V. Rukolaine: *Center of the Semigroup Algebra of a Finite Inverse Semigroup over the Field of Complex Numbers*. Plenum Publishing Corporation, 1987.



Jan Okninski: *Semigroup Algebras*. Marcel Decker, 1991.



A. H. Clifford, G. B. Preston: *The Algebraic Theory of Semigroups*. American Mathematical Society, 2000.



Benjamin Steinberg: *Representation Theory of Finite Monoids*. Springer, 2016.