Egyéni kutatómunka I. beszámoló

Gehér Boglárka

1. Homologikus dimenziók

Egy $M \in R - Mod$ baloldali R-modulus projektív feloldásán egy

$$... \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

egzakt sorozatot értünk, amiben minden P_i projektív. A feloldás minimális, ha minden n-re $P_n \xrightarrow{d_n} \mathrm{Ker}(d_{n-1})$ projektív fedő. Ekkor $\mathrm{Ker}(d_{n-1})$-et nevezzük az M n-ik syzygy modulusának, és $\Omega^n(M)$-mel jelöljük.

A legkisebb olyan n-et, amire létezik n-hosszú projektív feloldás, nevezzük M projektív dimenziójának, és ezt $\mathrm{pdim}(M)$-mel jelöljük. Minden projektív feloldásban a magok ugyanott lesznek projektívek, ezért ha létezik minimális projektív feloldás akkor $\mathrm{pdim}(M)$ a legkisebb olyan n, amire $\Omega(M)^n = 0$. Modulusok direktösszegének projektív dimenziója a dimenziók supremuma. Minden n, k-ra $\Omega^n(M) = \Omega^{n-k}(\Omega^k(M))$, ezért $\mathrm{pdim}\,\Omega^k(M) = \mathrm{pdim}(M) - k$, ha ez nagyobb mint 0. (Ezt dimenzióeltolásnak nevezzük).

R bal (jobb) globális dimenziója a baloldali (jobboldali) R-modulusok projektív dimenziójának supremuma, jele $\mathrm{lgldim}(R)$ ($\mathrm{rgldim}(R)$). Véges dimenziós algebra esetén ez megegyezik az egyszerű modulusok projektív dimenziójának supremumával.
Előfordulhat, hogy R globális dimenziója azért végtelen, mert valamelyik modulus projektív feloldása végtelen. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy létezike a véges projektív dimenziós modulusok között bármilyen nagy projektív dimenziójú modulus, akkor a globális dimenzió helyett vizsgálhatjuk a következőt:
R bal nagy finitisztikus dimenziójának nevezzük a

$$\mathrm{Findim}(R) = sup\{\mathrm{pdim}(M) \quad | \quad M \in R - Mod, \quad \mathrm{pdim}(M) < \infty\}$$

értéket és R bal kis finitisztikus dimenziójának a

$$\operatorname{findim}(R) = sup\{\operatorname{pdim}(M) \quad | \quad M \in R - mod, \quad \operatorname{pdim}(M) < \infty\}$$

értéket. Itt $R - Mod$ jelöli az R balmodulusainak, és $R - mod$ jelöli az R végesen generált balmodulusainak kategóriáját.

A finitisztikusdimenzió-sejtés eredeti formájában azt állítja, hogy minden véges dimenziós A algebrára teljesül $\operatorname{findim} A = \operatorname{Findim} A < \infty$. Azt már tudjuk, hogy a kis- és nagy finitisztikus dimenziók egyenlősége nem teljesül általában, de a finitisztikus dimenziók végességének kérdése még nyitott. Ezt bizonyos algebraosztályokra már bizonyították, ezek közül a monomiális algebrák esetét fogom bemutatni.

2. Monomiális algebrák

Q véges irányított gráfhoz tartozó K test feletti KQ gráfalgebra a Q-beli irányított utak által generált vektortér. Ha a p út kezdőpontja megegyezik a q út végpontjával, akkor legyen pq az az út amit q és p konkatenációjával kapunk, és legyen máskülönben $pq = 0$. Egy p út kezdőpontját $S(p)$, végpontját $E(p)$ jelöli.

Legyen L a legalább 1-hosszú utak által generált altér. Az I ideált megengedett ideálnak nevezzük, ha $I \subset L^2$ és ha létezik k, hogy $L^k \subset I$, ekkor a $A = KQ/I$ algebra véges dimenziós, bázisalgebra. Az A Jacobson-radikálja $J(A) = J = L/I$ Ha Q csúcsai $\{1, ..., n\}$, akkor a csúcsokhoz rendelt $\{e_1, ..., e_n\}$ idempotens elemek primitív idempotensek egy teljes rendszerét adják. A egyszerű modulusai Ae_i/Je_i, a direktfelbonthatatlan projektív modulusok ezek Ae_i projektív fedői.

Ha ezen felül teljesül, hogy I-t utak generálják, akkor azt mondjuk hogy A monomiális algebra. I minden nemnulla maradékosztályában pontosan egy $p \in KQ$ út van, így van értelme A-beli utakról és azok hosszáról beszélni. Az utak $\mathbb{P}$ halmaza A-nak egy bázisát adja. A j-hosszú utak $\mathbb{P}_j$ halmaza J^{j+1}/J^j egy bázisát adja.

3. Finitisztikusdimenzió-sejtés monomiális algebrákra

Először [1]-ben bizonyították hogy monomiális algebrákra a finitisztikus dimenzió véges. Zimmermann Huisgen [2] cikke egy új bizonyítást ad erre, megad vele egy becslést mind a kis, mind a nagy finitisztikus dimenzióra, és ad egy eljárást a becslésben szereplő korlát kiszámítására. Ez a következő tételen alapszik:

3.1. Tétel. *Ha A monomiális algebra, és M egy projektív A-modulus részmodulusa, akkor $\Omega^1(M) = \bigoplus Ap$, ahol minden p egy A-beli nemnulla, nem 0-hosszú út.*

Minden M modulusra teljesül, hogy minden syzygy modulusa egy projektív modulus részmodulusa, így az

$$s = \max\{\operatorname{pdim} Ap \quad | \quad p \text{ nemnulla, nem 0-hosszú út}, \operatorname{pdim} Ap < \infty\}$$

jelölést használva $s \leq findimA \leq FindimA \leq s+2$ a dimenzióeltolás miatt. Ha q egy olyan út, aminek kezdőpontja e és $\operatorname{pdim} Aq = s$, akkor Ae projektív fedője a végesen generált Ae/Aq modulusnak, és $\Omega^1(Ae/Aq) = Aq$ vagyis $\operatorname{pdim} Ae/Aq = s+1$, és így az alsó becslést s+1-re javíthatjuk. Az is látszik, hogy ha $\operatorname{pdim} M < \infty$, akkor $\operatorname{pdim} M \leq \dim_K(A) + 1$, mert legfeljebb $\dim_K(A)$ különböző Ap van, tehát $\dim_K(A) + 1$ lépés után már van ismétlődés.

A tétel bizonyítása vázlatosan a következő:

Bizonyítás. (a 3.1 tételé) Legyen $P \xrightarrow{f} M$ projektív fedő, és $P = \bigoplus_{l\in L} Ae_l$. Jelölje $\mu(l)$ az Ae_l izomorfiatípusát, ekkor P-nek egy bázisát adja a

$$B = \{pe_l \quad | \quad p \in \mathbb{P}, S(p) = \mu(l), l \in L\}$$

halmaz. B az utak hossza szerint felbontható B_j halmazokra, amik rendre $J^jP/J^{j+1}P$ egy bázisát adják. Teljesül, hogy $J^jP = \bigoplus_{b\in B_j} Ab$.
Jelölje π_j a $J^jM \to J^j/J^{j+1}$ kanonikus homomorfizmust, és f_j azt a szürjektív $J^jP/J^{j+1}P \to J^jM/J^{j+1}M$ leképezést, amit f indukál.
Minden α élre f_1 αB_0-t szürjektíven képezi $\pi_1(\alpha M)$-re ezért kiválasztható egy $T^\alpha \subset \alpha B_0$ részhalmaz, ami által generált alterre f_1-et megszorítva izomorfizmust kapunk. Összegyűjtjük a T^α halmazokat egy T_1, komplementereiket egy S_1 halmazba, ez egy diszjunkt unió. A T_1 által generált

altérre való megszorítása f_1-nek izomorfizmus lesz $\bigoplus \pi_1(M\alpha) = JM/J^2M$ (az itteni egyenlőséghez használjuk azt, hogy M egy projektív modulus része). Ez megad egy $Q_1 \to JM$ szürjektív homomorfizmust, ahol Q_1 jelöli a T_1 által generált A-modulust. Ekkor $JP = \bigoplus_{b \in B_1} Ab = \bigoplus_{s \in S_1} As \oplus Q_1$. Minden $s \in S_1$-hez található olyan $c(s) \in \mathrm{Ker}(f)$ amire $As \simeq Ac(s)$ és $JP = \bigoplus_{s \in S_1} Ac(s) \oplus Q_1 = C_1 \oplus Q_1$.
Legyen $T_0 = B_0$, $Q_0 = P$, Q_1, T_1 ahogy fenn. Innen indukcióval keresünk minden $i = 2, ..., k$ indexre (ahol k a legkisebb olyan szám amire $J^{k+1} = 0$) olyan $T_i \subset \mathbb{P}_1 T_{i-1} \subset B_i$ halmazt és C_i modulust, hogy teljesüljön az alábbi három tulajdonság:

1. $Q_i = \sum_{t \in T_i} At$-re $JQ_{i-1} = C_i \bigoplus Q_i$
2. f_i vektortérizomorfizmust indukál $\langle T_i \rangle$ és $J^i M / J^{i+1} M$ között
3. C_i olyan ciklikus modulusok direktösszege, amelyek mindegyike izomorf Ap-vel valamelyik i-hosszú p útra

Az indukciós lépés bizonyítása hasonló az $i = 1$ esethez. Mivel 2. miatt T_i lineárisan független $J^i P / J^{i+1} P$-ben, és $JQ_i \subset J^{i+1} P$, ezért $Q_i = \langle T_i \rangle \oplus_K JQ_i$. Ezt, 1-et és $JQ_k \subset J^{k+1} P = 0$-t felhasználva azt kapjuk, hogy $JP = (\bigoplus C_i) \oplus_K (\bigoplus_K \langle T_i \rangle)$. De $\bigoplus_K \langle T_i \rangle) \simeq_K JM$, vagyis $\bigoplus C_i \simeq JP/JM \simeq \mathrm{Ker}\, f$. Ezzel megkaptuk az első syzygy modulust a kívánt alakban.
□
A következő eljárással meg lehet határozni egy projektív A-modulus részmodulusánk projektív dimenzióját, speciálisan a véges sok Ap-re elvégezve megkaphatjuk a finitisztikus dimenzió becslésében szereplő s számot.

Minden A-beli p úthoz hozzárendelünk egy X_p változót, és tekintjük az olyan $A = (a_{ij})$, $i = 1, ..., n$, $j = 0, ..., k$ mátrixokat aminek 0. oszlopában egész számok szerepelnek, és ha $j \neq 0$, akkor a_{ij} j-hosszúságú i-ben kezdődő utakhoz tartozó változók egészegyütthatós kombinációja. Az ilyen mátrixok additív csoportját Mat-tal jelöljük, ez egy $\dim_K A$ rangú szabad Abel csoport.

Egy M végesen generált modulushoz hozzárendeljük az $[M] \in Mat$ mátrixot, amire $m_{i,0} = \dim_K \pi_0(e_i M)$ és

$$m_{i,j} = \sum_{p \in \mathbb{P}_j, E(p) = i} a_{ij}^p X_p = \sum_{p \in \mathbb{P}_j, E(p) = i} \dim_K(\pi_j(pM) X_p$$

ha $j > 0$. $[M]$ pontosan akkor 0, ha M is 0. Egy (α, p) párt j-kritikusnak nevezünk, ha $\alpha \in \mathbb{P}_1$, $p \in \mathbb{P}_{j-1}$ és $\alpha p \in \mathbb{P}_j$. Legyen L:$Mat \to Mat$ az az Abelcsoport-homomorfizmus, amit az

$$L(A) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{(\alpha,p)\text{j-kritikus}} (a^{p}_{E(p),(j-1)} - a^{\alpha p}_{E(\alpha p),j})[Ap]$$

képlet definiál. Ha M egy projektív modulus részmodulusa, akkor $L([M])$-ben a külső szumma j-ik tagja $[C_j]$, és modulusok direktösszegének mátrixa a mátrixok összege, ezért $L([M]) = [\Omega^1(M)]$, tehát M projektív dimenziója a legkisebb olyan n amire $L^n([M]) = 0$.

Hivatkozások

[1] E. L. Green, E. Kirkman and J. Kuzmanovich, Finitistic dimensions of finite dimensional monomial algebras, (preprint), November , 1988.

[2] B. Huisgen-Zimmermann. "Predicting syzygies over monomial relations algebras." Maunscripta Math. 70, 157–182 (1991).