Egyéni kutatómunka I. beszámoló

Gehér Boglárka

1. Homologikus dimenziók

Egy $M \in R - Mod$ baloldali R-modulus projektív feloldásán egy

$$... \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

egzakt sorozatot értünk amiben minden P_i projektív. A feloldás minimális ha minden n-re $P_n \xrightarrow{d_n} \mathrm{Ker}(d_{n-1})$ projektív fedő. Ekkor $\mathrm{Ker}(d_{n-1})$-t nevezzük az M n-ik syzygy modulusának, és $\Omega^n(M)$-mel jelöljük.

A legkisebb olyan n-et amire létezik n-hosszú projektív feloldás nevezzük M projektív dimenziójának, és ezt $\mathrm{pdim}(M)$-mel jelöljük. Minden projektív feloldásban a magok ugyanott lesznek projektívek ezért ha létezik minimális projektív feloldás akkor $\mathrm{pdim}(M)$ a legkisebb olyan n amire $\Omega(M)^n = 0$. Modulusok direktösszegének projektív dimenziója a dimenziók supremuma. Minden n, k-ra $\Omega^n(M) = \Omega^{n-k}(\Omega^k(M))$, ezért $\mathrm{pdim}\,\Omega^k(M) = \mathrm{pdim}(M)$ (ezt dimenzióeltolásnak nevezzük).

R bal (jobb) globális dimenziója a baloldali (jobboldali) R-modulusok projektív dimenziójának supremuma, jele $\mathrm{lgldim}(R)$ ($\mathrm{rgldim}(R)$). Véges dimenziós algebra esetén ez megegyezik az egyszerű modulusok projektív dimenziójának supremumával. Előfordulhat, hogy R globális dimenziója azért végtelen, mert valamelyik modulus projektív feloldása végtelen, ismétlődő. Például $\mathrm{pdim}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \infty$, de van olyan feloldása ami két lépés után ismétlődik. Így $\mathrm{lgldim}\,\mathbb{Z} = \infty$, de $\mathbb{Z} - Mod = AB$. Ezért bevezetjük az következő fogalmat:

R bal nagy finitisztikus dimenziójának nevezzük a

$$\mathrm{Findim}(R) = sup\{\mathrm{pdim}(M) \quad |M \in R - Mod, \quad \mathrm{pdim}(M) < \infty\}$$

értéket és R bal kis finitisztikus dimenziójának a

$$\text{findim}(R) = sup\{\text{pdim}(M) \quad |M \in R - mod, \quad \text{pdim}(M) < \infty\}$$

értéket.

A finitisztikusdimenzió-sejtés szerint véges dimenziós algebrák finitisztikus dimenziója véges. Ezt bizonyos algebraosztályokra már bizonyították, ezek közül a monomiális algebrák esetét fogom bemutatni.

2. Monomiális algebrák

Q véges irányított gráfhoz tartozó K test feletti KQ gráfalgebra a Q-beli irányított utak által generált vektortér. Ha a p út kezdőpontja megegyezik a q út végpontjával, akkor legyen pq az az út amit q és p konkatenációjával kapunk, és legyen máskülönben $pq = 0$. Egy p út kezdőpontját $S(p)$, végpontját $E(p)$ jelöli.

A KQ gráfalgebra $J = J(KQ)$ Jacobson radikálja nem más mint a legalább 1-hosszú utak által generált altér. Az I ideált megengedett ideálnak nevezzük, ha $I \subset J^2$ és ha létezik k, hogy $J^k \subset I$, ekkor a $A = KQ/I$ algebra véges dimenziós, bázisalgebra. Ha Q csúcsai $\{1, ..., n\}$ akkor a csúcsokhoz rendelt $\{e_1, ..., e_n\}$ idempotens elemek primitív idempotensek egy teljes rendszerét adják. A egyszerű modulusai Ae_i/Je_i, a direktfelbonthatatlan projektív modulusok ezek Ae_i projektív fedői.

Ha ezen felül teljesül, hogy I-t utak generálják, akkor azt mondjuk hogy A monomiális algebra. I minden nemnulla maradékosztályban pontosan egy $p \in KQ$ út van, így van értelme A-beli utakról és azok hosszáról beszélni. Az utak $\mathbb{P}$ halmaza A és a j-hosszú utak $\mathbb{P}_j$ halmaza J^{j+1}/J^j egy bázisát adják.

3. Finitisztikusdimenzió-sejtés monomiális algebrákra

Először [1]-ben bizonyították hogy monomiális algebrákra a finitisztikus dimenzió véges. Zimmermann Huisgen [2] cikke egy új bizonyítást ad erre, megad vele egy becslést mind a kis, mind a nagy finitisztikus dimenzióra, és ad egy eljárást a becslésben szereplő korlát kiszámítására. Ez a következő tételen alapszik:

3.1. Tétel. *Ha A monomiális algebra, és M egy projektív A-modulus részmodulusa, akkor* $\Omega^1(M) = \bigoplus Ap$*, ahol minden p egy A-beli nemnulla, nem 0-hosszú út.*

Minden M modulusra teljesül, hogy minden syzygy modulusa egy projektív modulus részmodulusa, így az

$$s = \sup\{\operatorname{pdim} Ap \quad | \quad p \text{nemnulla, nem 0-hosszú út}, \operatorname{pdim} Ap < \infty\}$$

jelölést használva $s \leq findimA \leq FindimA \leq s+2$ a dimenzióeltolás miatt. Ha q egy olyan út aminek kezdőpontja e és $\operatorname{pdim} Aq = s$ akkor Ae projektív fedője a végesen generált Ae/Aq modulusnak, és $\Omega^1(Ae/Aq) = Aq$ vagyis $\operatorname{pdim} Ae/Aq = s + 1$ és így az alsó becslést s+1-re javíthatjuk. Az is látszik, hogy ha $\operatorname{pdim} M < \infty$, akkor $\operatorname{pdim} M \leq \dim_K(A) + 1$, mert legfeljebb $\dim_K(A)$ különböző Ap van, tehát $\dim_K(A) + 1$ lépés után már van ismétlődés.

A tétel bizonyítása vázlatosan a következő:

Bizonyítás. Legyen $P \xrightarrow{f} M$ projektív fedő, és $P = \bigoplus_{l \in L} Ae_l$. Jelölje $\mu(l)$ az Ae_l izomorfiatípusát, ekkor P-nek egy bázisát adja a

$$B = \{pe_l \quad | \quad p \in \mathbb{P}, S(p) = \mu(l), l \in L\}$$

B az utak hossza szerint felbontható B_j halmazokra, amik rendre $J^jP/J^{j+1}P$ egy bázisát adják. Teljesül, hogy $J^jP = \bigoplus_{b \in B_j} Ab$.
Jelölje π_j a $J^jM \to J^j/J^{j+1}$ kanonikus homomorfizmust, és f_j azt a szürjektív $J^jP/J^{j+1}P \to J^jM/J^{j+1}M$ leképezést, amit f indukál.
Minden α élre f_1 αB_0-t szürjektíven képezi $\pi_1(\alpha M)$-re ezért kiválaszható egy $T^\alpha \subset \alpha B_0$ részhalmaz, ami által generált alterre f_1-et megszorítva izomorfizmust kapunk. Összegyűjtjük a T^α halmazokat egy T_1, komplementereiket egy S_1 halmazba, ez egy diszjunkt unió. A T_1 által generált altérre való megszorítása f_1-nek izomorfizmus lesz $\bigoplus \pi_1(M\alpha) = JM/J^2M$ (az itteni egyenlőséghez használjuk azt, hogy M egy projektív modulus része). Ez megad egy $Q_1 \to JM$ szürjektív homomorfizmust, ahol Q_1 jelöli a T_1 által generált A-modulust. Ekkor $JP = \bigoplus_{b \in B_1} Ab = \bigoplus_{s \in S_1} As \oplus Q_1$. Minden $s \in S_1$-hez található olyan $c(s) \in \operatorname{Ker}(f)$ amire $As \simeq Ac(s)$ és

$JP = \bigoplus_{s\in S_1} Ac(s) \oplus Q_1 = C_1 \oplus Q_1$.
Legyen $T_0 = B_0$, $Q_0 = P$, Q_1, T_1 ahogy fenn. Innen indukcióval keresünk minden $i = 2...k$ indexre (ahol k a legkisebb olyan szám amire $J^{k+1} = 0$) olyan $T_i \subset \mathbb{P}T_{i-1} \subset B_i$ halmazt és C_i modulust, hogy teljesüljön az alábbi három tulajdonság:

1. $Q_i = \sum_{t\in T_i} At$-re $JQ_{i-1} = C_i \bigoplus Q_i$
2. f_i vektortérizomorfizmust indukál $\langle T_i\rangle$ és $J^iM/J^{i+1}M$ között
3. C_i olyan ciklikus modulusok direktösszege, amelyek mindegyike izomorf Ap-vel valamelyik i-hosszú p útra

Az indukciós lépés bizonyítása hasonló az $i = 1$ esethez. Mivel 2. miatt T_i lineárisan független $J^iP/J^{i+1}P$-ben és $JQ_i \subset J^{i+1}P$, ezért $Q_i = \langle T_i\rangle \oplus_K JQ_i$. Ezt, 1-et és $JQ_k \subset J^{k+1}P = 0$-t felhasználva azt kapjuk, hogy $JP = (\bigoplus C_i) \oplus_K (\bigoplus_K \langle T_i\rangle)$. De $\bigoplus_K \langle T_i\rangle) \simeq_K JM$ vagyis $\bigoplus C_i \simeq JP/JM \simeq \operatorname{Ker} f$. Ezzel megkaptuk az első syzygy modulust a kívánt alakban.
□
A következő eljárással meg lehet határozni egy projektív A-modulus részmodulusánk projektív dimenzióját, speciálisan a véges sok Ap-re elvégezve megkaphatjuk a finitisztikus dimenzió becslésében szereplő s számot.

Minden A-beli p úthoz hozzárendelünk egy X_p változót és tekintjük az olyan $A = (a_{ij})$, $i = 1, ..., n$, $j = 0, ..., k$ mátrixokat aminek 0. oszlopában egész számok szerepelnek, és ha $j \neq 0$ akkor a_{ij} j-hosszúságú i-ben kezdődő utakhoz tartozó változók egészegyütthatós kombinációja. Az ilyen mátrixok additív csoportját Mat-tal jelöljük, ez egy $\dim_K A$ rangú szabad Abel csoport.

Egy M modulushoz hozzárendeljük az $[M] \in Mat$ mátrixot, amire $m_{i,0} = \dim_K \pi_0(e_iM)$ és

$$m_{i,j} = \sum_{p\in\mathbb{P}_j, E(p)=i} a^p_{ij} X_p = \sum_{p\in\mathbb{P}_j, E(p)=i} \dim_K(\pi_j(pM)X_p$$

ha $j > 0$. $[M]$ pontosan akkor 0, ha M is 0. Egy (α, p) párt j-kritikusnak nevezünk, ha $\alpha \in \mathbb{P}_1$, $p \in \mathbb{P}_{j-1}$ és $\alpha p \in \mathbb{P}_j$. Legyen L az az $Mat \to Mat$ Abelcsoport-homomorfizmus amit az

$$L(A) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{(\alpha,p)\text{j-kritikus}} (a^p_{E(p),(j-1)} - a^{\alpha p}_{E(\alpha p),j})[Ap]$$

Ekkor $L([M])$-ben a külső szumma j-ik tagja $[C_j]$, és modulusok direktösszegének mátrixa a mátrixok összege, ezért $L([M]) = [\Omega^1(M)]$, tehát M projektív dimenziója a legkisebb olyan n amire $L^n([M]) = 0$.

Hivatkozások

[1] E. L. Green, E. Kirkman and J. Kuzmanovich, Finitistic dimensions of finite dimensional monomial algebras, (preprint), November , 1988.

[2] B. Huisgen-Zimmermann. "Predicting syzygies over monomial relations algebras." Maunscripta Math. 70, 157–182 (1991).