Finitisztikusdimenzió-sejtés monomiális algebrákra

Gehér Boglárka
Témavezető: Ágoston István

2020

Homologikus dimenziók

Definíció

Egy $M \in R - Mod$ baloldali R-modulus projektív feloldásán egy

$$\ldots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

egzakt sorozatot értünk amiben minden P_i projektív.

Homologikus dimenziók

Definíció

Egy $M \in R - Mod$ baloldali R-modulus projektív feloldásán egy

$$\ldots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

egzakt sorozatot értünk amiben minden P_i projektív.
Véges dimenziós algebrák modulusainak létezik minimális projektív felbontása, egy ilyen feloldásban $\mathrm{Ker}(d_{n-1})$-t az M n-ik syzygy modulusának nevezzük, és $\Omega^n(M)$-mel jelöljük.

Homologikus dimenziók

Definíció

A legkisebb olyan n-et, amire létezik n-hosszú projektív feloldás, nevezzük M projektív dimenziójának, és ezt $\mathrm{pdim}(M)$*-mel jelöljük. Ha van minimális feloldás, akkor ez megegyezik a legkisebb olyan n-nel amire* $\Omega^n(M) = 0$.

Definíció

R bal (jobb) globális dimenziója a baloldali (jobboldali) R-modulusok projektív dimenziójának supremuma, jele $\mathrm{lgldim}(R)$ $(\mathrm{rgldim}(R))$*. Véges dimenziós algebra esetén ez megegyezik az egyszerű modulusok projektív dimenziójának supremumával.*

Például féligegyszerű gyűrűk globális dimenziója 0, mert minden modulus projektív.

Homologikus dimenziók

Definíció

R bal nagy finitisztikus dimenziójának nevezzük a

$$\mathrm{Findim}(R) = sup\{\mathrm{pdim}(M) \quad |M \in R - Mod, \quad \mathrm{pdim}(M) < \infty\}$$

értéket és
R bal kis finitisztikus dimenziójának a

$$\mathrm{findim}(R) = sup\{\mathrm{pdim}(M) \quad |M \in R - mod, \quad \mathrm{pdim}(M) < \infty\}$$

értéket.

A finitisztikusdimenzió-sejtés eredeti formájában azt mondta ki, hogy ha A egy véges dimenziós algebra, akkor $\mathrm{findim}(A) = \mathrm{Findim}(A) < \infty$. Azt már tudjuk, hogy az egyenlőség nem teljesül, de a finitisztikus dimenziók végességének kérdése még megoldatlan.

Gráfalgebrák

Definíció

Legyen Q egy véges irányított gráf, K egy test. A K feletti KQ gráfalgebra a Q irányított útjai által generált vektortér, ahol a p, q utak pq szorzata q és p konkatenációja ha ez lehetséges, és 0 különben.

Gráfalgebrák

Definíció

Legyen L a legalább 1-hosszú utak által generált altér. Az I ideált megengedett ideálnak nevezzük, ha $I \subset L^2$ és létezik n természetes szám, hogy $L^n \subset I$.

Ha I megengedett ideál, akkor az $A = KQ/I$ algebra bázisalgebra. Ha Q csúcsai $\{1, ..., n\}$, akkor csúcsokhoz tartozó e_i elemek idempotensek egy teljes rendszerét adják.
Az A Jacobson-radikálja $J = J(A) = L/I$
Az A algebra egyszerű modulusai $S_i = Ae_i/Je_i$ alakúak, ezek Ae_i projektív fedői lesznek a direktfelbonthatatlan projektív modulusok.

Monomiális algebrák

Definíció

Az $A = KQ/I$ algebra monomiális, ha az I megengedett ideált utak generálják.

Egy monomiális algebrában minden nemnulla maradékosztályban legfeljebb egy út lehet, ezért van értelme utak hosszáról beszélni.
Jelölje a $p \in A$ út kezdőpontját $s(p)$ és végpontját $e(p)$. Jelölje továbbá az A-beli j-hosszú utak halmazát $\mathbb{P}_j$ és $\mathbb{P} = \cup \mathbb{P}_j$ az utak halmazát.
$\mathbb{P}_j$ a J^j/J^{j+1} egy bázisát adja.

Finitisztikusdimenzió-sejtés monomiális algebrákra

Tétel

Ha A monomiális algebra, és M egy projektív A-modulus részmodulusa, akkor $\Omega^1(M) = \bigoplus Ap$, ahol minden p egy A-beli nemnulla, nem 0-hosszú út.

Finitisztikusdimenzió-sejtés monomiális algebrákra

Tétel

Ha A monomiális algebra, és M egy projektív A-modulus részmodulusa, akkor $\Omega^1(M) = \bigoplus Ap$, ahol minden p egy A-beli nemnulla, nem 0-hosszú út.

Minden M modulus minden syzygy modulusa egy projektív modulus része, tehát $\Omega^2(M)$ már előáll ilyen alakban.
Legyen

$$s = \sup\{\operatorname{pdim} Ap \quad | \quad p \text{ nemnulla, nem 0-hosszú út}, \operatorname{pdim} Ap < \infty\}.$$

Modulusok direktösszegének projektív dimenziója az összeadandók dimenzióinak supremuma, így a dimenzióeltolás miatt

$$s \leq \operatorname{findim} A \leq \operatorname{Findim} A \leq s + 2.$$

Ha p olyan út, hogy $\operatorname{pdim} Ap = s$, akkor a ciklikus Ap/Jp modulus dimenziója $s+1$, ezért a becslésben az alsó korlátot $s+1$-re lehet javítani.

Tétel

Ha A monomiális algebra, és M egy projektív A-modulus részmodulusa, akkor $\Omega^1(M) = \bigoplus Ap$, ahol minden p egy A-beli nemnulla, nem 0-hosszú út.

a bizonyítás a következőn alapszik: Legyen $P \xrightarrow{f} M$ projektív fedő, és $P = \bigoplus_{l \in L} Ae_l$. Jelölje $\mu(l)$ az Ae_l izomorfiatípusát, ekkor P-nek egy bázisát adja a

$$B = \{pe_l \quad | \quad p \in \mathbb{P}, S(p) = \mu(l), l \in L\}$$

B az utak hossza szerint felbontható B_j halmazokra, amik rendre $J^jP/J^{j+1}P$ egy bázisát adják. Teljesül, hogy $J^jP = \bigoplus_{b \in B_j} Ab$.

Először a $JP = \bigoplus_{b \in B_1} Ab$ direktösszeget két részre bontjuk:
$\bigoplus_{b \in B_1} Ab = \bigoplus_{s \in S_1} As \oplus \bigoplus_{t \in T_1} At = \bigoplus_{s \in S_1} As \oplus Q_1$.
T_1-et úgy választjuk ki, úgy, hogy T_1 lineárisan független legyen modulo J^2P , és így egy vektortérizomorfizmust kapunk $\langle T_1 \rangle$ és JM/J^2M között. Minden $s \in S_1$-hez keresünk egy $c(s) \in \mathrm{Ker}\, f$ elemet, hogy $\bigoplus_{s \in S_1} As \oplus Q_1 \simeq \bigoplus_{s \in S_1} Ac(s) \oplus Q_1 = C_1 \oplus Q_1$.
T_1 választása miatt Q_1 felbomlik, $\langle T_1 \rangle \oplus_K JQ_1$ alakban.

Innen JQ_1-et bontjuk tovább, úgy hogy először felírjuk, mint $J^2P = \bigoplus_{b \in B_2} Ab$ alakban, majd az előzőhöz hasonlóan választunk T_2, S_2 részhalmazokat.
Ezzel megkapjuk JP-t

$$JP = C_1 \oplus C_2 \oplus \langle T_1 \rangle \oplus \langle T_2 \rangle \oplus JQ_2$$

alakban, és $\langle T_2 \rangle$ izomorf J^2M/J^3M-mel.
Így haladunk tovább egészen addig az n-ig amire $JQ_{n-1} \subset J^nP = 0$.
Végeredményben megkaptuk a

$$JP = \bigoplus_{i=1}^{n} C_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \langle T_i \rangle$$

felbontást. Itt a második direktösszeg izmorof JM-mel, és ezért az első direktösszeg izomorf $\mathrm{Ker}\, f$-fel.

Definíció

Legyen A monomiális algebra. Minden A-beli p úthoz hozzárendelünk egy X_p változót és tekintjük az olyan $A = (a_{ij})$, $i = 1, ..., n$, $j = 0, ..., k$ mátrixokat aminek 0. oszlopában egész számok szerepelnek, és ha $j \neq 0$ akkor a_{ij} j-hosszúságú i-ben kezdődő utakhoz tartozó változók egészegyütthatós kombinációja. Az ilyen mátrixok additív csoportját Mat-tal jelöljük, ez egy $\dim_K A$ rangú szabad Abel csoport.

Egy M végesen generált baloldali A-modulushoz hozzárendeljük azt az $[M] \in Mat$ mátrixot, amire

$$m_{i,0} = \dim_K \pi_0(e_i M)$$

és

$$m_{i,j} = \sum_{p \in \mathbb{P}_j, E(p)=i} a_{ij}^p X_p = \sum_{p \in \mathbb{P}_j, E(p)=i} \dim_K(\pi_j(pM))X_p$$

ha $j > 0$.
$[M]$ pontosan akkor 0, ha M is 0.

Definíció

Egy (α, p) *párt j-kritikusnak nevezünk, ha* $\alpha \in \mathbb{P}_1$, $p \in \mathbb{P}_{j-1}$ *és* $\alpha p \in \mathbb{P}_j$.

Legyen L az az *Mat* $\to$ *Mat* Abelcsoport-homomorfizmus amit az

$$L(A) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{(\alpha,p)\text{j-kritikus}} (a^{p}_{E(p),(j-1)} - a^{\alpha p}_{E(\alpha p),j})[Ap]$$

képlet definiál.

Állítás

Ha M egy projektív modulus részmodulusa, akkor $L([M]) = [\Omega^1(M)]$.

$L([M])$-ben a külső szumma j-ik tagja $[C_j]$.

Például, ha $M = Aq$, akkor az $[M]$ mátrix m_{ij} együtthatójában azok az X_p-k fognak 1 együtthatóval szerepelni, amikre igaz, hogy $p \in \mathbb{P}_j$, $s(p) = e(q)$, $e(p) = i$, $pq \neq 0$, és minden más X_p 0 együtthatóval.
Ezek projektív modulusok részei, tehát lehet rájuk használni a tételt.