Egyéni kutatómunka

Forman Balázs Attila

December 2020

1 Bevezetés

Az egyéni kutatómunkám célja a szakdolgozatom folytatása volt, avagy a Lie-csoportok struktúrájának és topológiájának megértésére tett újabb kísérlet. A kutatómunka során cikkeket tanulmányoztam az előzetes ismereteimnek megfelelő mélységig, a végeredménye pedig 4 általam érdekesnek és izgalmasnak tartott cikk rövid összefoglalása lett, amik mind-mind más szemszögből vizsgálják a témát.

2 Orbitok és Morse-Bott elmélet kompakt Lie-csoportokban

[2]

Az első megfigyelés, hogy egy Lie csoportban a konjugáltosztályok egy fibrálás bázisát alkotják, ahol a totális tér maga a Lie csoport, a bázis pedig éppen egy adott konjugáltosztálybeli elem centralizátora. A jegyzet jelölése szerint legyen σ konjugáltosztálya ${}_\sigma$, centralizátora pedig C_σ. A megfigyelést bizonyítandó kerül kimondásra a következő tétel:

Tétel 1 *Legyen G kompakt Lie csoport, T egy maximális tórusz, és $\sigma \in T$. Ekkor M_σ homeomorf G/C_σ mellékosztálzainak halmazával, sőt előáll G beágyazott részsokaságaként.*

Bizonyítás (Ötlet) Definiáljuk az F: $G/C_\sigma \to M_\sigma$ leképezést, mint

$$F(gC) = g\sigma g^{-1} \in M_\sigma \subset G$$

Ez a leképezés nyilván bijekció, már csak azt kell belátni, hogy immerzó, avagy hogy az érintőtereken is bijekció. A cél most az lesz, hogy a csoportot az exponenciális leképezéssel paraméterezzük, és belássuk, hogy a derivált leképezés magja éppen TC_σ. Mivel G kompakt, az exponenciális leképezés szürjektív, tehát minden σC_σ-beli sebességvektor előáll $e^{tY}C_\sigma$ alakban, ahol Y G Lie algebrájából van. Ennek a görbének a képe F-nél előáll $e^{tY}\sigma e^{-tY}$ alakban, az érintője 0-ban tehát $Y\sigma - \sigma Y$. Ez pontosan akkor 0, ha $Y = \sigma Y \sigma^{-1}$, tehát ha $e^{tY} = \sigma e^{tY} \sigma^{-1}$, tehát ha a görbe C_σ-ban van, avagy egy pontból áll G/C_σ-ban, amikor nyilván 0 a sebessége.Ezzel beláttuk, hogy F beágyazás σC egy kornyezetében. A G-beli elemekkel történő konjugálások tranzitív diffeomorfizmusokként hatnak M_σ-n, így F minden pontban lokális beágyazás.

Vegyük észre, hogy $\sigma \in T$-re $dim(G/C_\sigma) = dim(G) - dim(C_\sigma) \leq dim(G) - dim(T)$, mivel $T \subset C_\sigma$

Lemma 1 *Minden G-beli konjugáltosztály metszi a maximális tóruszt (nem bizonyítjuk).*

Tétel 2 *Minden M_σ merőlegesen metszi T-t, páros dimenziós, és az Euler karakterisztikája a T-vel vett metszéspontok száma.*

Bizonyítás Az ötlet az, hogy centralizátorbeli elemekkel való konjugálás hatását vesszük a konjugáltosztályon, aminek a deriváltja megad egy érintő vektormezőt a sokaságon, aminek könnyű kiszámolni a lokális fokait és alkalmazni tudjuk a Poincaré-Hopf tételt.

Legyen $\sigma \in T$, és Y merőleges C_σ-ra az egységelemben. Ekkor G biinvariáns metrikájában $Y\sigma$ és σY merőlegesek C_σ-ra, tehát a különbségük is, ezek pedig épp M_σ σ-beli érintővektorai. Tekintsük T egy W érintővektorát az egységelemben. Ekkor

$$g \to g(t) = e^{tW} g e^{-tW}$$

izometriák egy paraméteres családját alkotják. Ennek a sebességvektora g-ben $Wg - gW$, ami érinteni fogja M_g-t. Ennek a vektormezőnek a zérushelyei pontosan e^{tW} centralizátorában lesznek. Alkalmas W választással azonban elérhető, hogy ez az egy dimenziós részcsoport sűrű legyen T-ben, aminek a centralizátora önmaga!

Ekkor tehát az érintő vektormező nullhelyei pontosan a metszéspontokban vannak, már csak a lokális fokok kellenének nekünk a Poincaré-Hopf tétel alkalmazásához. Mivel $g(t)$ σ-t fixen hagyó izometriák egy családja, így M_σ-ban egy kellően kicsi σ középpontú 1-kodimenziós gömbön sehol sem 0 érintő vektormezőt definiál, ami így biztosan páratlan dimenziós, amiből következik, hogy M_σ páros dimenziós. Ugyanakkor a leképezés foka σ-ban 1, mivel ez egy izometria, és így a vektormező a gömbre megszorítva is érintőirányú.

Szépen alkalmazhatóak a Morse-Bott elmélet tételei, ha találunk egy olyan függvényt, aminek könnyen meg tudjuk találni a kritikus sokaságoait, erre adnak jó példát a következő Lie csoportok, ahol éppen a másodrendű elemek konjugáltosztályai fogják adni Klasszikus Lie-csoportokon értelmezett Morse (vagy Morse-Bott) függvények vizsgálatakor adja magát az $SO(n)$, az $U(n)$ illetve az $Sp(n)$ standard beágyazása mátrixokkal megfelelően nagy dimenziós valós vektorterekbe, ahol az egységelembeli érintőtereik is könnyen kezelhetőek. Megpróbálunk úgy definiálni Morse-Bott függvényt ezeken a csoportokon, hogy egy-egy egész R^n-en értelmezett valós értékű függvényt megszorítunk. Egy ilyen függvény gradiense a csoporton éppen az adott p-beli gradiens levetítve az adott pont beli érintőtérre. Fontos itt, hogy azért épp ezek a csoportok érdekesek, mert ezek érintőtere a standard beágyazáskot épp az $X + X^* = 0$ alakú mátrixok.

Vegyük észre, hogy $tr(AB^*)$ (ahol a * a transzpozíció és komplex/kvaternió konjugálás) éppen az hermitikus skaláris szorzás R, vagy C feletti vektortéren! Vegyük továbbá azt is észre, hogy a $Re(tr(X))$ függvény gradiense minden pontban éppen az egységmátrix! Mivel egy A-beli érintőtere ezeknek a csoportokban épp az olyan X mátrixok, melyekre $XA^* + X^*A = 0$. Az egységelemben ez a feltétel csak azt mondja, hogy $X + X^* = 0$, tehát ha van egy mátrixunk, úgy tudjuk levetíteni ide, ha kivonjuk belőle az adjungáltját, és ezt elosztjuk kettővel, ugyanis tetszőleges négyzetes valós, komplex vagy kvaternió elemű mátrixra $M = (M + M^*)/2 + (M - M^*)/2$, és ezek a tr szerint merőlegesek egymásra, valamint $(M - M^*) + (M - M^*)^* = 0$.

Ha egy A-beli η vektort szeretnénk az adott érintőtérbe, akkor A^*-al eltolhatjuk, az egységelembe (ηA^*), ott levetíthetjük ($\eta A^* - A\eta^*$) és visszavihetjük A-ba, ekkor kapjuk hát, hogy a vetülete $\eta - A\eta^* A$, ami $\eta = I$-re épp azt adja, hogy a kritikus pontok/sokaságok a másodrendű elemek konjugáltosztályai lesznek.

Vegyünk egy G kompakt Lie csoportot, és benne egy M_σ kritikus részsokaság valamilyen f Morse-Bott függvényre nézve. Ez azt jelenti, hogy megköveteljük, hogy az egész részsokaság érintőterének merőleges kiegészítésén TG-ben az f második deriváltja legyen nemelfajuló. Ekkor a kritikus sokaságon az f második deriváltjának indexe állandó, ezt hívjuk az adott sokaság Morse-Bott indexének.

$G = U(3)$ esetben tehát a 2 kritikus sokaság $diag(-1, -1, 1)$ és $diag(-1, 1, 1)$ konjugáltosztályai és a $\pm I$. Ezek indexei pedig 4, 1 illetve nyilván 9 és 0. A két nem triviális konjugáltosztály mint homeomorf $CP^2 = U(3)/(U(2) \times U(1))$-el, aminek ismerjük a homológiáit.

Definíció : Egy CW-komplexus Poincaré polinomja az a $\sum b_i t^i$ polinom, ahol b_i a CW komplexus i. Betti száma, jelölése $p_{M_g}(t)$.
Definíció : Egy differenciálható sokaság f Morse függvényhez tartozó Morse polinomja $\sum \lambda_i t^i$, ahol λ_i az i indexű kritikus pontok száma.
Definíció : Egy differenciálható sokaság Bott polinomja egy f Bott függvényre nézve $\sum p_i(t)t^i$, ahol $p_i(t)$ az i indexű kritikus sokaságok Poincaré polinomjának összege.

Megjegyzés: A Morse illetve a Bott polinomok adott fokú együtthatói mindig legalább akkorák, mint ugyanazon sokaság Poincaré polinomjának, egyenlőség esetén hívjuk őket tökéletesnek.

$U(3)$ Bott polinomja tehát $1+t(1+t^2+t^4)+t^4(1+t^2+t^4)+t^9$, ami mint az belátható tökéletes is.

3 Frobenius-Schur összefüggés

[1]

Legyen G kompakt Lie-csoport és $\mu : G \to GL(V)$ egy reprezentációja, ω pedig G normált Haar-mértéke. Definiáljuk ekkor $P : V \to V$-t, mint

$$P(v) := \int_G \mu(g)(v)\, d\omega(g)$$

Nyilvánvalóan, ha H invariáns altere μ-nek, akkor P-nek is, továbbá

$$\mu(h)P(v) := \int_G \mu(hg)(v)\, d\omega(g) = \int_G \mu(g)(v)\, d\omega(g) = P(v)$$

Tehát P képtere a reprezentáció egy invariáns altere, és azt is tudjuk, hogy

$$P(P(v)) := \int_G \mu(g)(P(v))\, d\omega(g) = \int_G P(v)\, d\omega(g)$$

Látjuk tehát, hogy P egy vetítés μ invariáns alterére, tehát

$$dimV^G = tr(P) = \int_G tr(\mu(g))\, d\omega(g)$$

Ha a karaktereken úgy definiáljuk

$$\langle \chi_{1,2} \rangle := \int_G \chi_1 \overline{\chi_2}\, d\omega(g)$$

akkor analóg módon a diszkrét esethez teljesül a Schur-lemma és az irreducibilis karakterek "ortonormáltsága".

Tétel 3 *Azon lineáris leképezések terének dimenziója, amik felcserélhetőek G két reprezentációjával $\mu : G \to U$ és $\nu : G \to V$-vel épp*

$$\int_G (\mu(g))\overline{tr(\nu(g)}\, d\omega(g)$$

4 Coadjoint orbitok féligegyszerű Lie-csoportokban

[3]

Vegyünk egy G kompakt, féigegyszerű Lie-csoportot, és legyen ennek a Lie-algebrája g, annak a duális tere pedig g^*. Legyen h a Cartan részalgebra, h^*, pedig annak a duálisa.

Definíció: Legyen $\mu \in g^*$, ekkor az orbitja $O_\mu = \{Ad_g^* \mu | g \in G\}$.

Definíció: Legyen μ stabilizáló részcsoportja G_μ azon elemek G-ből, melyekre $Ad_g^* \mu = \mu$.

Definíció: Weyl csoportnak nevezzük a maximális tórusz normalizátorának és centralizátorának faktorcsoportját, ez tranzitívan hat h^*-on G egyszerű gyökeinek merőleges hipersíkjára való tükrözések által.

Tétel 4 *Minden orbit h^*-ot pontosan a Weyl csoport egy orbitjában metszi.(Ez nagyjából ekvivalens azzal, mint, hogy minden konjugáltosztály belemetsz a maximális tóruszba)*

Definíció: Weyl kamrának nevezzük h^* azon elemeit, melyek minden pozitív gyökkel hegyesszöget zárnak be. Falait Γ_α-val jelöljük. Minden koadjungált orbit 1 pontban metszi a Weyl kamrát. Ha belső pontban metszi akkor generikus, ha nem akkor degenerált pályáról beszélünk.

Tétel 5 *Minden orbit előáll, mint egy fibrálás totális tere, ahol egy másik orbit a fibrum, kivéve a maximális degenerált orbit.*

Bizonyítás Ha van olyan μ_0, hogy $T \subset G_{\mu_0}$, akkor G/T egy fibrálás G/G_{μ_0} felett G_{μ_0}/T fibrummal, és hasonlóan minden más stabilizáló részcsoportra.

5 Egy tökéletes Morse függvény lapos konnexiók modulusterén

[4]

Vegyünk egy g génuszú pontozott felületet, X-et, és jelölje M_g az $SU(2)$ lapos konnexiók modulusát X-en, $-I$ holonómiával egy kijelölt pontban. Vegyük X fundamentális csoportjának standard generátorrendszerét, és rendeljük egy konnexióhoz a holonómiájának nyomát a_g-n végigmenve! A cikk azt látja be, hogy ez egy tökéletes Morse-függvény.

M_g egy alternatív definícióját úgy is megkaphatjuk, hogy vesszük az

$$\mu_g : SU(2)^{2g} \to SU(2)$$

$$(A_1, B_1, \dots A_g, B_g) \to -\Pi[A_i, B_i]$$

leképezés ősét az identitásban (belátható, hogy ez egy reguláris érték). Ezen hat $SU(2)$ konjugálással (koordinátánként). Legyen $M_g := \mu^{-1}(g)/SU(2)$ Ez a definíció azért ekvivalens, mert egy lapos konnexió hatását egy görbe mentén meghatározza a görbe homotópiaosztálya, ezért elég egy görbe hatását nézni T_pX-en. Az ösképképzés rögzíti, hogy csak a $-I$ holonómiájú konnexiókat nézzük, a konjugálás hatásával vett faktor pedig a bázisválasztástól való függést szünteti meg.

M_g minden pontjában az érintőtér izomorf

$$su(2) \to su(2)^{2g} \to su(2)$$

kohomológiájával, ahol az első leképezés a konjugálás, a második pedig μ_g deriváltja. μ_g^{-1}-ből egy reprezentáns definiálni fogja X fundamentális csoportjának egy reprezentációját $su(2)$-ben, és a fenti kohomológia éppen $H^1(\pi_1(X), \mathbf{R})$.

Belátható, hogy ennek a függvénynek minden g-re 3 kritikus sokasága lesz (± 1-ben, és 0-ban), ahol a kritikus sokaságok $(\mu_{g-1}^{-1} \times SO(2))/SO(2)$, illetve egy S_1^{2g-2}, ami ad egy rekurziót a Morse-Bott függvényekre, mégpedig, hogy

$$p_{M_g}(t) = (1+t^3)^2 p_t(M_{g-1}) + t^{2g-2}(1+t)^{2g-2} = \frac{(1+t^3)^{2g} - t^{2g}(1+t)^{2g}}{(1-t^2)(1-t^4)}$$

Források

[1] Cambridge University Press, 1997, Theodore Frankel *The Geometry of Physics* Appendix D

[2] Cambridge University Press, 1997, Theodore Frankel *The Geometry of Physics* Appendix E

[3] Ninth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, 2008, Julia Bernatska and Petro Holod *Geometry and topology of coadjoint orbits of semisimple lie groups*

[4] 1999, Michael Thaddeus *A perfect Morse function on the moduli space of flat connections*