Fokszámeloszlás Additív Fitnesszel rendelkező Preferential Attachement Gráfokban

Ferenczi Dávid

December 16, 2020

Motiváció

Képzeljünk el egy iskolai osztályt, ahová minden nap egy új gyerek érkezik, és elkezd a többiekkel barátkozni.

Motiváció

Képzeljünk el egy iskolai osztályt, ahová minden nap egy új gyerek érkezik, és elkezd a többiekkel barátkozni.
Mit mondhatunk az egyes gyerekek barátainak a számáról, ahogy az osztály létszáma egyre csak nő?

Motiváció

Képzeljünk el egy iskolai osztályt, ahová minden nap egy új gyerek érkezik, és elkezd a többiekkel barátkozni.
Mit mondhatunk az egyes gyerekek barátainak a számáról, ahogy az osztály létszáma egyre csak nő?
Kell valamit mondanunk az új gyerek barátkozási preferenciáira, hogy ezt a kérdést egyáltalán tárgyalni tudjuk.

Preferential Attachement Gráfok

Legyenek n_0, m_0 természetes, nem nulla számok, és vegyünk egy n_0 csúccsal és m_0 éllel rendelkező gráfot. Legyen továbbá minden $1 \leq i \leq n_0$ számra $\deg(i)$ az i-edik csúcs befoka, valamint egy m tetszőleges természetes szám. Vegyünk a gráfhoz egy új pontot, és kössük hozzá a korábbi csúcsokhoz m éllel, úgy hogy az alábbi szabály érvényes:

$$\mathbb{P}(v(n+1), v(i) \in E(G)) = \frac{deg(i)}{E_{G_n}}.$$

Preferential Attachement Gráfok

Legyenek n_0, m_0 természetes, nem nulla számok, és vegyünk egy n_0 csúccsal és m_0 éllel rendelkező gráfot. Legyen továbbá minden $1 \leq i \leq n_0$ számra $\deg(i)$ az i-edik csúcs befoka, valamint egy m tetszőleges természetes szám. Vegyünk a gráfhoz egy új pontot, és kössük hozzá a korábbi csúcsokhoz m éllel, úgy hogy az alábbi szabály érvényes:

$$\mathbb{P}(v(n+1), v(i) \in E(G)) = \frac{deg(i)}{E_{G_n}}.$$

Megjegyzés

Ez csupán a peremeloszlás, pontosítani kell.

Preferential Attachement Gráfok

Legyenek n_0, m_0 természetes, nem nulla számok, és vegyünk egy n_0 csúccsal és m_0 éllel rendelkező gráfot. Legyen továbbá minden $1 \leq i \leq n_0$ számra $\deg(i)$ az i-edik csúcs befoka, valamint egy m tetszőleges természetes szám. Vegyünk a gráfhoz egy új pontot, és kössük hozzá a korábbi csúcsokhoz m éllel, úgy hogy az alábbi szabály érvényes:

$$\mathbb{P}(v(n+1), v(i) \in E(G)) = \frac{deg(i)}{E_{G_n}}.$$

Megjegyzés

Ez csupán a peremeloszlás, pontosítani kell.

Megjegyzés

A mi iskolás példánk nyelvén ez azt jelenti, hogy minél több barátja van valakinek, az új tanuló annál szívesebben barátkozik vele.

Az Additív Fitnesz Esete

Tegyük fel a korábbi példában ismertetett eset mellé, hogy van még valamilyen véletlen tulajdosága minden gyereknek, ami alapján népszerűvé válik. Legyen ez egy F_i független, pozitív , 1 valószínűséggel véges valószínűségi változó. Ekkor az előző oldali képlet az alábbira módosul:

$$\mathbb{P}(v(n+1), v(i) \in E(G)) = \frac{deg(i) + F_i}{E_{G_n} + S_n},$$

ahol S_n az F_i-k összege.

Élek együttes eloszlása

$Z_n(i)$-i-edik csúcs foka, F_i-az i-edik csúcs fitnesze.
Az élek konkrét eloszlása:

$$\frac{Z_n(i) + F_i}{m_0 + n - n_0 + S_n}, \tag{1}$$

$$\frac{Z_n(i) + F_i}{m_0 + m(n - n_0) + S_n}, \tag{2}$$

$$\frac{Z_{n,j-1}(i) + F_i}{m_0 + m(n - n_0) + j - 1 + S_n}, \tag{3}$$

Élek együttes eloszlása

$Z_n(i)$-i-edik csúcs foka, F_i-az i-edik csúcs fitnesze.
Az élek konkrét eloszlása:

$$\frac{Z_n(i) + F_i}{m_0 + n - n_0 + S_n}, \tag{1}$$

$$\frac{Z_n(i) + F_i}{m_0 + m(n - n_0) + S_n}, \tag{2}$$

$$\frac{Z_{n,j-1}(i) + F_i}{m_0 + m(n - n_0) + j - 1 + S_n}, \tag{3}$$

Megjegyzés

Az (1)-esben látottakhoz még fel kell tenni, hogy a
$\Delta(Z_n)(i) = Z_{n+1}(i) - Z_n(i)$ változók korrelációja nem pozitív.

Tétel (Lodewijks–Ortgiese, 2020)

Vegyünk egy preferential attachement modellt, amire $\mathbb{E}(F) < \infty$*,*
és $\theta_m = 1 + \frac{\mathbb{E}(F)}{m}$*, és* $\mathbb{P}(t > F) = \mu((t, \infty))$*.*
Vegyük az alábbi tapasztalati fokszámeloszlásokat:

$$\Gamma_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_n(i)\delta_{F_i}}{n} \quad \Gamma_n^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1_{Z_n(i)=k}\delta_{F_i}}{n} \quad p_n(k) = \Gamma_n^{(k)}([0, \infty])$$

Tétel (Lodewijks–Ortgiese, 2020)

Vegyünk egy preferential attachement modellt, amire $\mathbb{E}(F) < \infty$*,*
és $\theta_m = 1 + \frac{\mathbb{E}(F)}{m}$*, és* $\mathbb{P}(t > F) = \mu((t, \infty))$*.*
Vegyük az alábbi tapasztalati fokszámeloszlásokat:

$$\Gamma_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_n(i)\delta_{F_i}}{n} \quad \Gamma_n^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1_{Z_n(i)=k}\delta_{F_i}}{n} \quad p_n(k) = \Gamma_n^{(k)}([0, \infty])$$

Ekkor minden k*-ra* 1 *valósíznűséggel teljesülnek az alábbi konvergenciák.*

$$\Gamma_n \to \Gamma, \;\; \Gamma_n^{(k)} \to \Gamma^k, \;\; p_n(k) \to p(k),$$

ahol

$$\Gamma(dx) = \frac{x}{\theta_m - 1}\mu(dx) \quad \Gamma^{(k)}(dx) = \frac{\theta_m}{x+\theta_m}\prod_{l=1}^{k}\frac{(l-1)+x}{l+x+\theta_m}\mu(dx),$$

valamint

$$p(k) = \int_0^\infty \frac{\theta_m}{x+\theta_m}\prod_{l=1}^{k}\frac{l-1+x}{l+x+\theta_m}\mu(dx)$$

A függetlenség szükségessége

Mit lehet mondani, ha a fitneszek összefüggenek?

A függetlenség szükségessége

Mit lehet mondani, ha a fitneszek összefüggenek?

Tétel

Legyen $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *egy erősen stacionárius, nem negatív, ergodikus sorozat. Ekkor az ebből az eloszlásból kapott fitnessekből generált preferential attachement modell tapasztalati mértékei konvergálni fognak.*

A bizonyításról

Az első lépés, hogy alkalmas A_n, B_n, R_n folyamatokkal a tapasztalati fokszámeloszlásokra ez teljesül:

$$\Gamma_{n+1}((f,f'])-\Gamma_n((f,f']) \leq \frac{1}{n+1}(A_n-B_n\Gamma_n((f,f']))+(R_{n+1}-R_n).$$

Ezután belátjuk, hogy ha az A_n, B_n, R_n sztochasztikus folyamatok konvergálnak, akkor a Γ_n limesze is megkapható.
$\Gamma_n^{(k)}$ hasonlóan majd indukció.
Majd integrálunk, hogy megkapjuk $p(k)$-t.