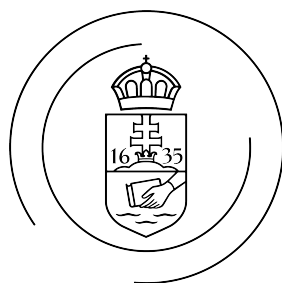


Nemszinguláris mátrixok sarok- és anti-sarokfőminorjai

Varga Péter

Témavezető:
Bérczi Kristóf



ELTE

EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

Budapest
2025

1 Bevezetés

A White sejtés [1] szerint egy $\mathcal{M}$ matroid $B, B' \in \mathcal{B}$ bázisa között létezik szimmetrikus kicserélések olyan sorozata, ami B -t B' -be viszi.

Ez az állítás bizonyított például grafikus matroidokra és reguláris matroidokra [2], viszont lineáris matroidokra még nem ismert az eredmény. A félév során elsődlegesen az $\mathbb{F}_2$ feletti lineáris matroidok esetén vizsgáltam a feladatot, többek között azért, mert itt még kisebb méret mellett megvizsgálható az összes matroid és ezért könnyen lehet példákat és ellenpéldákat keresni.

2 A sejtés lineáris matroidokra

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a vizsgált $\mathcal{M}(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ matroidra teljesül, hogy $S = B \cup B'$, ahol $B, B' \in \mathcal{B}$ és $B \cap B' = \emptyset$. Ellenkező esetben a matroid megszorítható a $B \Delta B'$ halmazra, ha erre van megoldás, akkor az kiegészíthető megoldássá $B \cup B'$ -ben is.

A lineáris matroidok minden esetben reprezentálhatóak úgy, hogy egy rang méretű egységmátrix, és további oszlop vektorok. Legyen a matroid rangja r , most a feltevés miatt a lineáris matroid reprezentálható egy $r \times r$ -es egységmátrixal és egy $A \in \mathbb{K}^{r \times r}$ nem szinguláris mátrixal ($\mathbb{K}$ egy test). Legyen az $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ és $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ rendre az egységmátrix és A oszlopai.

Az állítás átfogalmazható úgy, hogy létezik π_1 és π_2 permutáció úgy, hogy az $\{e_{\pi_1(1)}, e_{\pi_1(2)}, \dots, e_{\pi_1(r)}, a_{\pi_2(1)}, a_{\pi_2(2)}, \dots, a_{\pi_2(r)}\}$ sorozatra teljesül, hogy bármely r egymást követő eleme és azok komplementerei bázist alkotnak a matroidban, vagyis lineárisan függetlenek. A sorok felcserélése nem befolyásolja az oszlopvektorok függetlenségét, a sorokat átrendezve π_1 szerint újra egységmátrixot kapunk. Vagyis vizsgálható a következő, létezik-e olyan π_c és π_r permutáció, hogy A oszlopait π_c , sorait π_r szerint átrendezve teljesül a feltétel.

Azok a halmazok, amelyek bázist kell alkossanak a matroidban, az alábbi módon írhatók fel:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I_1 & 0 & A_1 & A_2 \\ 0 & I_2 & A_3 & A_4 \end{array} \right]$$

Ahol az I_j -k az egységmátrixot és az A_j -k az A mátrixot alkotják, $I_1, A_1 \in \mathbb{K}^{k \times k}$, $I_2, A_4 \in \mathbb{K}^{(r-k) \times (r-k)}$. Ekkor a feltétel szerint az alábbi mátrixok nem szingulárisak:

$$M_1 = \begin{bmatrix} I_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ I_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

A kifejtési tétel alapján $\det(M_1) = \det(A_4)$ és $\det(M_2) = \det(A_1)$, vagyis a sejtés lineáris matroidok esetében a következővel ekvivalens. Minden nem szinguláris $A \in \mathbb{K}^{r \times r}$ mátrix esetén létezik a soroknak és oszlopoknak olyan átrendezése, hogy a sarok- és anti-sarokfőminorjai nem szingulárisak.

3 Bináris mátrixok

3.1 Tesztelés

Bináris mátrixok előnyösek abból a szempontból, hogy több állítást lehet akár 7×7 vagy 8×8 -as mátrixokra is ellenőrizni.

Ezt a kérdést legfeljebb 7×7 -es bináris mátrixokra ellenőriztem és ezekre mind igaz volt. 8×8 -as esetre még ellenőrizhető az állítás kellően erős számítógépen értelmes időben.

3.2 Jelölések

Definíció 3.1. Legyen $I, J \subseteq [r]$, $A \in \mathbb{F}_2^{r \times r}$ esetén $A[I, J]$ jelölje az A mátrix I sorai és J oszlopai által meghatározott részmátrixot.

Definíció 3.2. Legyen $I, J \subseteq [r]$, $A \in \mathbb{F}_2^{r \times r}$ esetén $A(I, J)$ jelölje az A mátrix I sorai és J oszlopai kihagyásával meghatározott részmátrixot.

Definíció 3.3. Sym_r jelölje az r elemű permutációk csoportját.

Definíció 3.4. $P = (\pi_c, \pi_r) \in Sym_r^2$ és $A \in \mathbb{F}_2^{r \times r}$ esetén $P(A)$ jelentse az A mátrix átrendezettjét, ahol az oszlopokat π_c a sorokat pedig π_r szerint rendezzük át.

Definíció 3.5. $P \in Sym_r^2$ esetén legyen $P^T(A) := P(A^T)$ és $Sym_{r,T}^2 = \{P^T : P \in Sym_r^2\}$.

Definíció 3.6. $A, B \in \mathbb{F}_2^{r \times r}$ legyen $A \sim_p B \Leftrightarrow \exists P \in S \in Sym_r^2 \cup Sym_{r,T}^2 : P(A) = B$.

3.3 Rendezés

Jó lenne, ha nem kellene minden bináris nem szinguláris bináris mátrixra igazolni az állítást, hanem esetleg csak ezeknek egy speciális részhalmazára.

Ha létezik valamilyen összehasonlítás a mátrixok között például egy $\prec$ rendezés, ami teljesíti, hogy ha $A, B \in \mathbb{F}_2^{r \times r}$ nem szinguláris mátrixok és $A \prec B$ és A átrendezhető a sejtésnek megfelelő módon, akkor B -is. Egy ilyen rendezés esetén elegendő megvizsgálni a minimális elemeket és azokra bizonyítani az állítást.

3.3.1 1. Rendezés

Legyen a $\prec_1 \subseteq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ binér reláció a következő:

$$A \prec_1 B \iff \begin{aligned} &\exists P \in Sym_r^2 \cup Sym_{r,T}^2 : \forall I, J \subseteq [r], |I| = |J| : \\ &\det(P(A)[I, J]) \neq 0 \Rightarrow \det(B[I, J]) \neq 0 \end{aligned}$$

Ha $A \prec_1 B$, és A egy rendezése megfelelő, akkor B egy rendezése is az, mert ha A egy részmátrixa nem szinguláris, akkor az a megfelelő részmátrix

B -ben nem szinguláris. A sarok- és anti-sarokfőminorok determinánsa a transzponálásnál nem változik, ezért a transzponálás esetén is igaz az állítás.

Ez részbenrendezés:

- **Reflexív:** triviálisan teljesül.
- **Antiszimmetrikus:** mivel az 1×1 -es részmátrixokra is teljesül az állítás, ezért, ha $A \prec_1 B$ és $B \prec_1 A$ egyszerre teljesül, akkor $A = B$.
- **Tranzitív:** triviálisan teljesül.

3.3.2 2. Rendezés

Legyen a $\prec_2 \subseteq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ binér reláció a következő:

$$A \prec_2 B \iff \begin{aligned} &\exists P \in \text{Sym}_r^2 \cup \text{Sym}_{r,T}^2 : \forall I, J \subseteq [r], |I| = |J| : \\ &\det(P(A)[I, J]) \neq 0 \text{ és } \det(P(A)(I, J)) \neq 0 \Rightarrow \\ &\det(B[I, J]) \neq 0 \text{ és } \det(B(I, J)) \neq 0 \end{aligned}$$

Az $A \in \mathbb{F}_2^{r \times r}$ és $I, J \subseteq [r], |I| = |J|$ esetén, ha $\det(A[I, J]) = 0$ vagy $\det(A(I, J)) = 0$, akkor sem $A[I, J]$ sem $A(I, J)$ nem lehet sem sarokfőminor, sem anti-sarokfőminor, vagyis csak azok az esetek kellenek, amikor egyik sem szinguláris. Ez már nem részben rendezés:

- **Reflexív:** triviálisan teljesül.
- **Antiszimmetrikus:** ez már nem teljesül.
- **Tranzitív:** triviálisan teljesül.

Ez már nem részben rendezés, de még mindig igaz az állítás, hogy ha $A \prec_2 B$, akkor elég A -ra bizonyítani az állítást. Ezáltal bevezethető egy ekvivalencia reláció $A \sim_2 B \Leftrightarrow A \prec_2 B$ és $B \prec_2 A$. Az ekvivalenciaosztályok között már részbenrendezés.

Megjegyzés. $A \prec_1 B \Rightarrow A \prec_2 B$

3.3.3 3. Rendezés

Nevezzünk egy mátrixot jónak, ha teljesíti, hogy a sarok- és anti-sarokfőminorjai nem negatívak. Legyen $A \in \mathbb{F}_2^{r \times r}$ ekkor legyen $\mathcal{P}(A)$ a következő halmaz:

$$\mathcal{P}(A) = \{P : P \in \text{Sym}_r^2 \cup \text{Sym}_{r,T}^2 \text{ és } P(A) \text{ jó mátrix}\}$$

Legyen a $\prec_3 \subseteq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ binér reláció a következő:

$$A \prec_3 B \iff \begin{aligned} &\exists P \in \text{Sym}_r^2 \cup \text{Sym}_{r,T}^2 : \\ &\mathcal{P}(P(A)) \subseteq \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

, ahol $(P \circ P')(A) = P(P'(A))$.

Ez a második rendezésnél is erősebb állítás, mert ez már csak azokra az állapotokon múlik, amik számítanak (ilyen szempontból ez a legjobb rendezés). A másodikhoz hasonlóan ez sem részbenrendezés, viszont itt is be lehet vezetni egy $\sim_3$ ekvivalencia relációt és az ekvivalencia osztályokon már részben rendezés.

Megjegyzés. $A \prec_2 B \Rightarrow A \prec_3 B$

3.3.4 Eredmények

Az előző rendezéseket alkalmazva 5×5 -s méretig végignéztam a bináris mátrixokat, és vizsgáltam ezek minimális elemeit. A három rendezés kapcsolata miatt $(A \prec_1 B \Rightarrow A \prec_2 B \Rightarrow A \prec_3 B)$ lehet egymás után $\prec_3, \prec_2$ és $\prec_1$ sorrendben használni. (Ekkor lehetséges, hogy egy ekvivalencia osztályon belül a későbbiekben tudunk minimumot választani.)

Például 3×3 -as bináris mátrixok között $\sim_p$ szerint 6 ekvivalencia osztály van és ezek között kettő minimális elem van a rendezések szerint:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A minimális osztályok száma adott méretű mátrixhoz:

r	Nem szingulárisok száma $\sim_p$ szerint	Minimális osztályok száma
3	6	2
4	36	7
5	505	71

Egy-két szabályos mátrix megfigyelhető a minimálisok között, például az identitás mátrix mindig minimális osztályban lesz, és a felső és alsó háromszögmátrixokat mind megelőzi.

Általánosan nem találtam jó kategorizálást a minimális mátrixok reprezentálására, amely az 5×5 -ös mátrixok esetén is minden esetet lefedett volna.

4 Egyenletesen sűrű matroidok

A lineáris eseten kívül vizsgáltam egy kapcsolódó másik állítást is az egyenletesen sűrű matroidokról, ezt általánosan nem csak a lineáris matroidok esetében.

Definíció 4.1. Egy $\mathcal{M}(S, r)$ matroid egyenletesen sűrű, ha $\forall X \subseteq S$ esetén:

$$\frac{|X|}{r(X)} \leq \frac{|S|}{r(S)}$$

Megjegyzés. Ez a szükséges feltétele például annak is, hogy egy matroidot fel lehessen bontani $\lceil \frac{|S|}{r(S)} \rceil$ darab független halmaz uniójára.

Egyenletesen sűrű matroidok esetén a következő a sejtés. Legyen $\mathcal{M}(s, r)$ matroid, ahol $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$, ha $\mathcal{M}$ egyenletesen sűrű, akkor létezik olyan π permutáció, amire teljesül, hogy $\forall i \in [n]$ esetén $X_i = \bigcup_{j=0}^{r-1} \{s_{\pi((i+j) \bmod n)}\}$ független.

Megjegyzés. Ha $\mathcal{M}$ két bázis uniója, akkor teljesül a sűrűségi feltétel, ekkor ez a sejtés gyengébb, mivel az erősebb sejtés megköveteli, hogy a két bázis előálljon X_i -ként.

Definíció 4.2. $\mathcal{M}(S, r)$ matroid és $X \subseteq S$ esetén $\beta(X) := |X| - r(X)$.

Állítás 4.1. Legyen $\mathcal{M}(S, r)$ matroid és tegyük fel, hogy $\beta(S) > 0$, ekkor minden $X \subseteq S$ -re amire $r(X) > 0$ teljesül, hogy

$$\frac{r(S)}{\beta(S)} \leq \frac{r(X)}{\beta(X)}$$

Bizonyítás. $X \subseteq S$ esetén $|X| = r(X) + \beta(X)$ legyen $r(x) > 0$, ekkor

$$\frac{r(x) + \beta(X)}{r(x)} \leq \frac{r(S) + \beta(S)}{r(S)}$$

$$\frac{\beta(X)}{r(x)} \leq \frac{\beta(S)}{r(S)}$$

$$\frac{r(S)}{\beta(S)} \leq \frac{r(X)}{\beta(X)}$$

□

Megjegyzés. Ebből következik, ha C a matroid egy köre, akkor $\beta(C) = 1$, ezáltal $\frac{r(S)}{\beta(S)} < |C|$, minden kör legalább $\frac{r(S)}{\beta(S)} + 1$ hosszú.

$\beta(S) = 0$ esetben triviálisan teljesül a sejtés. $\beta(S) = 1$ esetben a megjegyzés alapján minden kör legalább $r(S) + 1$ hosszú, vagyis S egy kör.

4.1 $\beta(S) = 2$ eset

Ekkor a matroid minden körének a hossza legalább $\frac{|S|-2}{2} + 1 = \frac{|S|}{2}$.

Állítás 4.2. Ha $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ a matroid körei, és $C_1 \neq C_2$, akkor $S = C_1 \cup C_2$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem legyen $X = C_1 \cup C_2$. Mivel $C_1 \neq C_2$, ezért $C_1 \setminus C_2 \neq \emptyset$ és $C_2 \setminus C_1 \neq \emptyset$. $\Rightarrow r(X) \leq |X| - 2$, mert $e \in C_1 \setminus C_2$ esetén $C_2 \in X - e$, vagyis $X - e$ nem független. Ekkor $\frac{|X|}{r(x)} \geq \frac{|X|}{|X|-2} > \frac{|S|}{|S|-2} = \frac{|S|}{r(S)}$, ami ellentmond a sűrűségi feltételnek. □

Állítás 4.3. Legyen $\mathcal{M}(S, r)$ egyenletesen sűrű matroid, amire $\beta(S) = 2$ és legyen $\mathcal{C}$ a matroid köreinek halmaza, ekkor $\mathcal{C}' = \{S \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$ S partíciója.

Bizonyítás. Legyen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, ekkor az előző állítás miatt $C_1 \cup C_2 = S \Rightarrow (S \setminus C_1) \cap (S \setminus C_2) = \emptyset$, vagyis $\mathcal{C}'$ elemei diszjunktak.

Tegyük fel, hogy létezik $e \in S$, amire $e \notin \bigcup \mathcal{C}'$, ekkor $e \in C_1 \cap C_2$, a gyenge köraxióma alapján létezik $C \in \mathcal{C}$, amire $C \subseteq C_1 \cup C_2$ és $e \notin C$. Ekkor $e \in S - C$ és $e \in \bigcup \mathcal{C}'$, ami ellentmondás. $\square$

Állítás 4.4. *Egy S alaphalmazon egy $\mathcal{P}$ partíció esetén $\mathcal{C} = \{S \setminus H : H \in \mathcal{P}\}$ egy matroid körei.*

Bizonyítás. Az 1. axióma triviálisan teljesül, mert $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ esetén, ha $C_1 \subseteq C_2$, akkor $S \setminus C_2 \subseteq S \setminus C_1$, mivel $\mathcal{P}$ partíció, ezért ez csak akkor lehet, ha $C_1 = C_2$.

A 2. axiómához kell, hogy $e \in C_1 \cap C_2$ esetén létezzen $C \subseteq C_1 \cup C_2$, $e \notin C$ és $C \in \mathcal{C}$. Mivel $C_1 \cup C_2 = S$ ezért ez nem megkötés és minden $e \in S$ -re létezik $H \in \mathcal{P}$ amire $e \in H$ és ekkor $C = S \setminus H$ -ra $e \notin C$.

Vagyis teljesülnek a köraxiómák. $\square$

Ezáltal azok az egyenletesen sűrű matroidok, amikre $\beta(S) = 2$, pontosan megfeleltethetők azon $\mathcal{P}$ partícióinak S -nek, ahol $\forall X \in \mathcal{P}$ teljesül, hogy $|X| \leq \frac{|S|}{2}$.

Megjegyzés. *Grafikus matroidok esetén még ennél is jobban lehet karakterizálni az ilyen tulajdonságú gráfokat. Pontosán azon gráfok grafikus matroidja lesz egyenletesen sűrű $\beta(S) = 2$ mellett, amire létezik u, v két csúcs és a gráf három pontdiszjunkt út u és v között, ami közül bármely kettő hosszának összege legfeljebb $\frac{|E|}{2}$. [3]*

References

- [1] N. L. White. A unique exchange property for bases. *Linear Algebra and its Applications*, 31:81–91, 1980.
- [2] Kristóf Bérczi, Bence Mátravölgyi, & Tamás Schwarcz. (2023). Reconfiguration of basis pairs in regular matroids.
- [3] Karel Devriendt, & Raffaella Mulas. (2024). Uniform density in matroids, matrices and graphs.