

Gabow sejtés lineáris matroidokon

Varga Péter

Témavezető: Bérczi Kristóf

2025. június 5.

Gabow sejtés

Legyen $\mathcal{M}(S, r)$ egy matroid, A és B a matroid két bázisa. Ekkor létezik az $A \cup B$ elemeknek olyan körberendezése, hogy A elemei és B elemei is intervallumot alkotnak, továbbá bármely rangnyi hosszú intervallum bázist alkot.

Megjegyzés

Feltehető, hogy $S = A \cup B$ és $A \cap B = \emptyset$.

Lineáris matroidok

Lineáris átírás

Az előző megkötések mellett lineáris esetben a reprezentáció $[A|B]$ alakú, ahol az A és B nem szinguláris négyzetes mátrixok.

Sejtés

Létezik olyan oszlop permutáció A -hoz és B -hez is, hogy a permutáció után ciklikusan minden rang hosszú intervallum független vektorokat tartalmaz.

Megjegyzés

Feltehető, hogy az egyik bázis reprezentánsa az indentitás mátrix $B = I$.

Átfogalmazás

Ha $B = I$, akkor az előző ekvivalens azzal, hogy létezik A' , ami előáll A sor és oszlopainak megpermutálásával, amire $[A'|I]$ eleget tesz a feltételnek.

Megfogalmazás A' -vel

Ekvivalens átfogalmazás, hogy A' -re teljesül: minden sarok- és anti-sarokfőminorjai nem szinguláris.

Új feladat

Legyen K test, teljesül-e, hogy $A \in K^{n \times n}$ nonszinguláris mátrix esetén mindig lehetséges-e úgy permutálni a sorait és az oszlopait, hogy a kapott mátrix sarokfőminorjai és anti-sarokfőminorjai mind nonszingulárisak legyenek.

Megjegyzés

Ha csak a sarokfőminorokra vagy anti-sarokfőminorokra kell garantálni az állítást, az megtehető csak oszlop vagy sor permutálással. (Pl.: Gauss eliminációból)

- Ötlet: próbáljunk meg valamilyen alapesetet keresni.
- Ilyen alapeseteket kerestem bináris mátrixok között.
- A következő tulajdonság kell: Ha A -nak létezik átpermutálása $\Rightarrow B$ -nek is létezik átpermutálása. Ekkor elég csak A -ra bizonyítani.
- Például lehet részbenrendezést definiálni, ekkor csak a minimális elemekre kellene bizonyítani.

Definíció

$A \in K^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ esetén $A[I, J]$ jelölje az I sorok és J oszlopok által kijelölt részmátrixot.

Részbenrendezés 1

$$A \prec B$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall I, J \subseteq \{1, \dots, n\}, |I| = |J| : \det(A[I, J]) \neq 0 \Rightarrow \det(B[I, J]) \neq 0$$

Megjegyzés

Továbbá lehet ekvivalencia osztályonként nézni oszlop sor permutációk szerint. (A transzponálást is hozzá lehet venni.)

Definíció

$A \in K^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ esetén $A(I, J)$ jelölje az I sorok és J oszlopok komplementerei által kijelölt részmátrixot.

Részbenrendezés 2

$$A \prec B$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall I, J \subseteq \{1, \dots, n\}, |I| = |J| :$$

$$\det(A[I, J]) \neq 0 \text{ és } \det(A(I, J)) \neq 0 \Rightarrow \det(B[I, J]) \neq 0$$

Definíció

$A \sim A'$ ha A' előállítható A -ból oszlop- és sorpermutálással (és esetleg transzponálással).

Részbenrendezés 3

$$A \prec B$$



$\exists A' \sim A$: ha A' -nek létezik jó átpermutálása $\Rightarrow$
az átpermutálás jó B – re is.

- Ezek között vizsgáltam a minimális elemeket legfeljebb 6×6 -os bináris mátrixok esetén.
- Sajnos 6×6 -os esetben nagyon sok minimális elem marad még a legerősebb rendezés mellett is.
- (A sejtés 7×7 -es bináris mátrixokra teljesül.)

- Gyengébb sejtés: a bázisoktól nem követeljük meg, hogy az elemeik intervallumot alkossanak.
- Ez általánosan egyenletesen sűrű matroidokon értelmezett.

Köszönöm a figyelmet.