



ELTE | TTK
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

EGYÉNI KUTATÓMUNKA

Aszimptotikus összefonódás-transzformációk

Zöldy Márton

Témavezető

Vrana Péter

egyetemi docens

BME TTK Matematika Intézet

Algebra és Geometria Tanszék

Kivonat

A kvantum-információelmélet egyik alapvető kérdése, hogy mely összefont kvantumállapotok között lehetséges transzformáció bizonyos megengedett műveletek segítségével. Leggyakrabban tetszőleges lokális kvantumoperációt és klasszikus kommunikációt engedünk meg, de egyes alkalmazások szempontjából érdekes egy ezidáig kevésbé vizsgált változat is, amelyben a klasszikus kommunikáció helyett csak korrelált véletlen forrás segíti a lokális műveleteket.

A kutatómunka célja feltételeket találni kétrészű tiszta állapotok sok példánya közötti transzformáció létezésére aszimptotikusan nullához tartó hiba mellett.

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Budapest, május 2025

1. Bevezetés

A kvantum-információelmélet a kvantumelméletet és az információelméletet ötvöző tudományterület, melyben a fizikai rendszerek statisztikus leírásával bevezetett eszközök segítségével vizsgálunk információelméleti kérdéseket. Ennek egy részterülete a kvantum Shannon-elmélet, ami-ben a kalsszikus információelmélet problémáinak analógiái kerülnek a fókuszba és egyik fő feladata egy kvantum rendszerben a különböző csatornák kapacitásának meghatározása. A kutatómunka során összefont állapotok között, egy bizonyos statikus csatornán keresztüli transzformáció feltételeit vizsgáljuk. A beszámolóban csak a legszükségesebb fogalmakat tudom bevezetni, hogy a terjedelemre vonatkozó keretbe minél inkább beleférhessek, ugyan ezen idokból fogom az állításokat is bizonyítás nélkül hagyni. A jelölésekhez kapcsolódóan meg kell említenem, hogy használni fogom a Dirac-jelölést, ami a matematikai irodalomban talán kevésbé elterjedt, ellentétben a fizikaival. A terület megismeréséhez két fő forrást használtam, Mark M. Wilde információelméleti irányból való megközelítésű könyvét [3], illetve Mosonyi Milánnak a „Bevezetés a kvantum-információ elméletbe” című, BME-n oktatott tárgyára készített, lineáris algebrai megközelítésű jegyzetét [1].

1.1. Kvantum rendszerek leírása

Jelen esetben véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modellt használunk a rendszerünk leírására. Ez azt jelenti, hogy tekintünk egy véges dimenziós $\mathcal{H}$ Hilbert-teret, ennek a lineáris operátoraiból álló C^* -algebrát jelöljük $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -val, aminek egy $*$ -részalgebrája jelenti majd a rendszer *megfigyelhető mennyiségeit*, ezt $\mathcal{A}$ -val jelöljük. $\mathcal{A}$ -nak a pozitív szemidefinit, 1-nyomú elemeit hívjuk *állapotoknak*, amik együttes halmaza képi az $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ *állapotteret*. Egy $\mathcal{X}$, a mérés lehetséges kimeneteleit reprezentáló halmazhon értelmezett, véges tartójú, pozitív operátor értékű mértéket ($\mathcal{A}$ -beli értékkészlettel) *mérések* vagy *megfigyelésnek* nevezünk, ezek együttes halmazát jelöljük $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ -el. A mérési statisztikákat az alábbi *Born-szabály* segítségével végezhetjük.

Állítás. *Az imént bevezetett jelöléseket használva, bármely $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $M \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ esetén $\{P_{\varrho, M}(x) := \text{Tr } \varrho M_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ véges tartójú valószínűségi-eloszlás $\mathcal{X}$ -en.*

Könnyen látható, hogy az állapottér $\mathcal{A}$ -ban, $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ pedig $\mathcal{A}^{\mathcal{X}}$ -ben konvex részhalmazok, illetve a Born-szabály szerinti hozzárendelés mind a két változója szerint affin. Ezek alapján ha az előbbi halmazok extrémális elemeit vesszük, beszélhetünk rendre *tiszta* állapotokról, illetve mérésekről, az utóbiak speciális esete, a *projektív mérések*, mikor a mértékben nem csak pozitív, de projektív (idempotens) operátorok szerepelnek. A tiszta állapotra egy példa az $|\psi\rangle\langle\psi|$ *vektor állapot*, ha $\psi \in \mathcal{H}$, $|\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{A}$ (1-rangú projekció). Sőt, az is igaz, hogy minden tiszta állapot egy vektor állapot. A nem tiszta állapotokra *kevertként* hivatkozunk, amik a rendszer külső bizonytalanságát modellezzik, ami a rendelkezésre álló információnk hiányosságát jelenti.

A rendszerünket *klasszikusnak* nevezzük, ha $\mathcal{A}$ kommutatív, ellenkező esetben *kvantumnak*. A kvantum rendszerekben számos „furcsaság” jelenik meg a klasszikusakhoz képest, például egyfajta belső bizonytalanság lesz jellemző rájuk, ami miatt tiszta állapotokat tiszta mérésekkel mérve is kaphatunk nem-triviális valószínűségi eloszlást eredményül, ezzel a determinisztikusságot megszüntetve.

Több alrendszer együtteséből előálló rendszert a tenzorszorzatuk segítségével modellezhetjük. Egy ilyen rendszer állapotát *szorzat állapotnak* nevezzük, ha előáll az alrendszerek állapotainak tenzorszorzataként, ha pedig szorzat állapotok konvex kombinációjaként áll elő, akkor *szeparálhatónak* mondjuk. A nem szeparálható állapotok az *összefonott állapotok*, melyek előfordulásának feltétele, hogy egynél több alrendszer ne legyen klasszikus. Minden tiszta, szeparálható állapot szorzat állapot.

Jelöljük az $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ összetett rendszerünket $\mathcal{A}_{[n]}$ -nel, legyen Λ az $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ egy részhalmaza. Világos, hogy $\mathcal{A}_\Lambda := \bigotimes_{i \in \Lambda} \mathcal{A}_i$ alrendszert a természetes módon beágyazhatjuk $\mathcal{A}_{[n]}$ -be. Ennek a műveletnek a Hilbert-Schmidt skalárszorzásra vonatkozó adjungáltját sokat használják a kvantum-információelméletben, *parciális nyomnak* nevezik. Ez a halmazok komplementereire az alábbi operátort jelenti:

$$\mathrm{Tr}_\Lambda : \mathcal{A}_\Lambda \otimes \mathcal{A}_{[n] \setminus \Lambda} \rightarrow \mathcal{A}_{[n] \setminus \Lambda} \quad X \otimes Y \mapsto (\mathrm{Tr} X) \cdot Y.$$

Parciális nyomnak több kellemes tulajdonsága is van, ezek között szerepel, hogy pozitív (a pozitívitás megőrző értelemben), illetve nyomtartó is, amik következményeként az összetett rendszer egy állapotának meghatározhatjuk vele egy alrendszer komplementerére vonatkozó marginális állapotát.

A kétrészi rendszerek tiszta állapotainak vizsgálatához hasznos eszközt biztosít számunkra a következő állításban szereplő *Schmidt-felbontás*.

Állítás. Minden nemnulla $\psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ vektor esetén létezik egy-egy $\{e_i\}_{i=1}^r$, $\{f_i\}_{i=1}^r$ ortonormált rendszer $\mathcal{H}_A$ -ban, illetve $\mathcal{H}_B$ -ben, valamint egy $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$ valószínűségi eloszlás, ahol r -el a $\mathrm{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi|$ rangját jelöljük, hogy $\psi = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} e_i \otimes f_i$.

Feltéve hogy $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = d$, mivel egy-egy kiválasztott ortonormált bázist V_A , illetve V_B parciális izometriákkal áttanszformálhatjuk az ortonormált rendszerekbe, illetve a valószínűségi eloszláshoz tetszőlegesen hozzávehetünk 0 elemeket, így a felbontás az alábbi alakra hozható:

$$|\psi\rangle = (V_A \otimes V_B) \sum_{i=1}^d \sqrt{P_i} |i\rangle \otimes |i\rangle. \quad (1)$$

Mivel tiszta állapotok esetén az összefonódottság a marginálisok kevertségét jelenti, ezért a Schmidt-felbontásban szereplő parciális nyom rangja az összefonódottság mértékével áll kapcsolatban. Ezt *Schmidt-rangnak* nevezzük, ha egynél nagyobb értéket vesz fel, az állapotunk

összefonódott, ha pedig a maximális $\min\{\dim\mathcal{H}_A, \dim\mathcal{H}_B\}$ -vel egyezik meg, illetve a felbontásban szereplő együtthatók egyenletes eloszlást követnek, az állapotot *maximálisan összefonódottnak* mondjuk.

1.2. Transzformációk

Hogy az előzőekben bevezetett (al)rendszereken bármiféle folyamatot leírassunk (legyen az például mérés, időfejlődés vagy kommunikáció), a megfigyelhető mennyiségek algebrai között olyan transzformációkra van szükségünk, melyek az egyik állapotterét a másikéba képzik. Ennek két feltétele van, hogy a lineáris leképezés teljesen pozitív, illetve nyomtartó legyen. Az ezen tulajdonságokkal rendelkező $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ leképezések terét $\text{CPTP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -vel jelöljük, elemeit *kvantum csatornáknak*, vagy $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ esetben *kvantum operációknak* hívjuk. Információelméleti nézőpontból az ilyen transzformációkra erőforrásokként tekintünk. Általános esetben egy kvantum csatorna nagyon értékes, „drága” erőforrásnak számít, ezért különböző mértékű megszorításaival gyengébb, „olcsóbb” erőforrásokat vezethetünk be. A következőkben a számunkra szükséges transzformációkat fogjuk definiálni, amiket majd „ingyenesnek” tekintünk, az erőforrásunk pedig maga az összefonódott állapot lesz.

Az általánosság kedvéért a lokális operációkra a küldő vagy fogadó fél rendszerében különböző kiinduló és cél megfigyelhető algebraikkal fogunk tekinteni, mert előfordulhat például egy mérés során, hogy a mérés utáni rendszer drasztikusan megváltozik.

Definíció. Egy $\Phi \in \text{CPTP}(\mathcal{A}_A \otimes \mathcal{A}_B, \mathcal{A}_{A'} \otimes \mathcal{A}_{B'})$ kvantum csatornát lokális operációnak nevezünk, ha előáll $\Phi_A \otimes \Phi_B$ alakban, ahol $\Phi_A \in \text{CPTP}(\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_{A'})$ és $\Phi_B \in \text{CPTP}(\mathcal{A}_B, \mathcal{A}_{B'})$. Ha $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_A)$ egy lokális operációval $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{A'})$ állapotba vihető, azt az alábbi módon jelöljük: $\varrho \xrightarrow{\text{LO}} \sigma$.

Definíció. Legyen $\mathcal{A}_A \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ és $\mathcal{A}_B \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$, valamint $d = \dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B$. Egy $\Phi \in \text{CPTP}(\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B)$ leképezést klasszikus csatornának nevezünk, ha léteznek $\{e_i^A\}_{i=1}^d \subset \mathcal{H}_A$ és $\{e_i^B\}_{i=1}^d \subset \mathcal{H}_B$ ortonormált bázisok, hogy $\Phi(\cdot) = \sum_{i=1}^d \langle e_i^A | \cdot | e_i^A \rangle | e_i^B \rangle \langle e_i^B |$.

Ha egy ϱ állapotot lokális operáció és klasszikus csatorna használatával áttanszformálhatunk egy σ állapotba, akkor a $\varrho \xrightarrow{\text{LOCC}} \sigma$ jelölést használjuk és LOCC transzformációként hivatkozunk rá.

A *korrelált véletlen* egy klasszikus erőforrás, ami során a két félnek egy közös valószínűségi változóhoz van hozzáférése. Ezt kombinálva a lokális operációkkal, azoknak egy konvex burkát kapjuk, amit már a vizsgálni kívánt LOSR transzformációnak nevezünk.

Definíció. Legyen $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_A)$ és $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_B)$. $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$, ha $\sigma \in \text{conv}\{\tau \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_B) \mid \varrho \xrightarrow{\text{LO}} \tau\}$, *conv-al a konvex burkot jelölve.*

1.3. Monoton mennyiségek

Kíváncsiságunk tárgya, hogy mikor transzformálhatóak egymásba állapotok együttese bizonyos csatornákon keresztül. A kérdésre szükséges feltételeket szabhatunk monoton mennyiségekkel, melyek a transzformáció során monoton nőnek, vagy csökkennek, ezek viszont általánosan, önmagukban nem bizonyulnak elégségesnek. Shannon módszeréhez hasonlóan pedig, a későbbi vizsgálódásunkban, megengedünk egy kis hibát, amennyiben az az állapotok több példányszámban vett transzformációjával aszimptotikusan a 0-ba tart. Ehhez szükségünk lesz olyan mennyiségekre, amikkel az állapotok közelségét mérhetjük. Most az általunk monoton mennyiségként vizsgálni kívánt fogalmak és távolságok definíciója, illetve a fontosabb tulajdonságaik megemlézése következik.

Definíció. Egy ϱ állapot entrópiája: $H(\varrho) := -\text{Tr} \varrho \log \varrho$.

Ahogy a klasszikus esetben a Shannon-entrópia, az entrópia itt is a várható információszerzést (vagy ha úgy tetszik bizonytalanságot) méri, csak klasszikus bitek helyett qubitek formájában. Az entrópia nemnegatív mennyiség és abban az esetben 0, ha az állapot tiszta, illetve maximális értékét a maximálisan összefonódott állapotok esetén veszi fel, ami a rendszerünk dimenziójának logaritmusával egyezik meg. Következő tulajdonsága a *konkavitás*, ami alatt a következőt értjük: ϱ_i állapotok p_i valószínűségi eloszlás szerinti kombinációjával kapott $\varrho = \sum_i p_i \varrho_i$ állapot esetén $H(\varrho) \geq \sum_i p_i H(\varrho_i)$. Az entrópia izometriával való konjugálásra invariáns. A kvantum entrópiát a Shannon-entrópiából is megkaphatjuk az állapoton végzett 1-rangú mérésekkel kapott valószínűségi eloszlások minimumjaként, vagy a spektrálfelbontásban szereplő együtthatókból is. Az utóbbi verzióból világos, hogy a tenzorszorzásra nézve additív lesz, mivel a Shannon-entrópia additív független eloszlásokra. Az entrópia valójában az információtartalom várható értéke, amelynek szórására is teljesül az előző értelemben vett additivitás.

Definíció. Egy ϱ állapot entrópia varianciája: $V(\varrho) := -\text{Tr} \varrho (\log \varrho)^2 - (H(\varrho))^2$.

A véges dimenziós Hilbert-terek lineáris operátoropátori felett a nyommal normát definiálhatunk: $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \ni A$ operátorra $\|A\|_1 := \text{Tr}(|A|)$, ahol $|A| = \sqrt{A^* A}$. Az ezen norma által indukált távolságot nevezzük *nyom-norma távolságnak*. Két állapot ilyen távolsága a háromszögegyenlőtlenség alapján maximum 2 lehet, ami akkor szaturálódik, ha a az állapotok tartója merőleges egymásra, ezért szokás még egy $\frac{1}{2}$ -es faktorializálni. Szorzatállapotokra ez a távolság teleszkopikusan viselkedik: $\|\varrho_1 \otimes \varrho_2 - \sigma_1 \otimes \sigma_2\|_1 \leq \|\varrho_1 \otimes \sigma_1\|_1 + \|\varrho_2 \otimes \sigma_2\|_1$. Kvantum csatornák használata esetén a nyom-norma távolság monoton csökken. Egymáshoz közeli állapotoknak várhatóan az entrópiájuk is közel esnek egymáshoz, erről szól a következő állításban szereplő *Fannes-Audeaert egyenlőtlenség*.

Állítás. Legyen $\varrho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, ekkor $|H(\varrho) - H(\sigma)| \leq \frac{1}{2} \|\varrho - \sigma\|_1 \cdot \log(\dim \mathcal{H} - 1) + h_2(\|\varrho - \sigma\|_1)$.

Állapotok „közelségének” vizsgálatára használatos még a *fidelity*, ez azonos állapotok esetén 1-et ad eredményül és 0-t, mikor az állapotok tartói merőlegesek. Ennek segítségével is definiálhatunk távolságot.

Definíció. A $\varrho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ állapotokra vonatkozó fidelity: $F(\varrho, \sigma) := \|\sqrt{\varrho}\sqrt{\sigma}\|_1$.

Az állapotok purifikált távolsága pedig: $D(\varrho, \sigma) := \sqrt{1 - (F(\varrho, \sigma))^2}$.

A *fidelity* szimmetrikus, a tenzorszoratra multiplikatív, a pozitív nyomtartó leképezések során (tehát a parciáli nyom esetén is) monoton csökkenő, izometriákkal való konjugálásra invariáns és a változói szerint külön-külön konkáv. A nyom-norma távolsággal az alábbi módon függ össze:

$$1 - \sqrt{F(\varrho, \sigma)} \leq \frac{1}{2} \|\varrho - \sigma\|_1 \leq 1 + \sqrt{F(\varrho, \sigma)}.$$

A két távolságfogalom közül egy adott probléma esetén a „kényelmesebbet” szokás használni.

1.4. Aszimptotikus vizsálódás fogalmai

Shannon nyomán, ahogyan a klasszikus információelméletben a független, azonos eloszlású forrásból származó információ összességében tipikus és atipikus halmazokat fedezhetünk fel, a kvantum-információelméletben ennek analógiájára vezetjük be a tipikus és atipikus altereket. A kvantum-információelmélet aszimptotikus vizsgálatai során feltehetjük, hogy a megfigyelhető mennyiségek algebrája a rendszer Hilbert-terén értelmezett korlátos operátorok teljes egészében vett halmaza, ezért innentől kezdve ezt tekintjük alapértelmezettnek.

Tegyük fel, hogy a független, azonos eloszlású kvantuminformáció-forrásunk $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ -n egy p_X eloszlás szerint generál tiszta állapotokat, tehát minden $x \in X$ -hez tartozik egy $|x\rangle \in \mathcal{H}_A$ vektor, $p_X(x)$ valószínűséggel. A forrás várható állapota ez alapján $\varrho_A = \sum_{x \in X} p_X(x) |x\rangle\langle x|$, ami épp ϱ_A felbontása 1-rangú projekciók konvex kombinációjára, így feltehetjük, hogy a fent szereplő $|x\rangle$ vektorok $\mathcal{H}_A$ egy teljes ortonormált bázisát alkotják. Használjuk a forrást nagy számban, n-szer, ekkor a generált együttes állapot a $\mathcal{H}_{A^n} := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_{A_i}$ Hilbert-tér felett $\varrho_{A^n} = (\varrho_A)^{\otimes n}$ -lesz, amit $\sum_{x^n \in X^n} p_{X^n}(x^n) |x^n\rangle\langle x^n|$ alakban bonhatunk fel spektrálisan, $|x^n\rangle$ -el a $\mathcal{H}_A$ Hilbert-tér különböző $\mathcal{H}_{A_i}$ „másolataiban” lévő bázisok szorzatához tartozó $\bigotimes_{i=1}^n |x_i\rangle_{A_i}$ vektort jelölve, hasonlóan a $p_{X^n}(x^n) := \prod_{i=1}^n p_X(x_i)$ jelölést bevezetve, ahol $X^n \ni x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definíció. A $\mathcal{H}_{A^n}$ Hilbert-tér egy $T_{A^n}^\delta$ alterét δ -tipikus alternek hívjuk, ha

$$T_{A^n}^\delta = \text{span}\{|x^n\rangle_{A^n} \mid |-\frac{1}{n} \log(p_{X^n}(x^n)) - H(p_X)| \leq \delta\}$$

A definícióban a $p_{A^n}(x^n)$ minta entrópiáját hasonlítottuk össze a forrásunkra jellemző valószínűségi eloszlás Shannon-entrópiájával. Az *atipikus alternek* pedig a $(T_{A^n}^\delta)^\perp$ -hívjuk. A tipikus alterek hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a tipikus sorozatok a klasszikus információelméletben, viszont mielőtt ezeket kimondhatnánk, meg kell vizsgálni, hogy mikor tipikus egy állapot, erre való a következő projekció, melynek tartója a tipikus, magja az atipikus alter.

Definíció. Egy ϱ_A állapot $T_{A^n}^\delta$ tipikus alterére való tipikus projekciója:

$$\Pi_{A^n}^\delta := \sum_{|x^n\rangle \in T_{A^n}^\delta} |x^n\rangle \langle x^n|.$$

Az n növelésével, a „nagyszámok világába érve”, a valószínűség, hogy ϱ_{A^n} a tipikus altérben van, az 1-hez tart: $\text{Tr}(\Pi_{A^n}^\delta \varrho_{A^n}) \geq 1 - \varepsilon$; a tipikus altér mérete exponenciálisan kisebb a $\mathcal{H}_{A^n}$ dimenziójánál, formálisan: $(1 - \varepsilon)2^{n(H(\varrho_A) - c\delta)} \leq \text{Tr}(\Pi_{A^n}^\delta) \leq 2^{n(H(\varrho_A) + c\delta)}$, ahol c egy konstans; a $\Pi_{A^n}^\delta \varrho_{A^n} \Pi_{A^n}^\delta$ sajátértékei közel egyenletes eloszlást követnek: $\forall x^n \in T_{A^n}^\delta : 2^{-n(H(\varrho_A) + c\delta)} \leq p_{X^n}(x^n) \leq 2^{-n(H(\varrho_A) - c\delta)}$; minden $\varepsilon \in (0, 1)$ és $\delta > 0$ esetén, ha n elég nagy.

Az állapotok x^n tekintetében azonos empirikus eloszlású elemeit típusosztályokra bonthatjuk, hiszen ezekben a valószínűségi tagok egyformák lesznek, ezáltal a minták ugyanazon entrópiáját adva.

Definíció. Legyen $t \in \mathcal{P}_n(X)$ diszkrét valószínűségi eloszlás, az X^n t -típusú típusosztályát az alábbi részhalmaza jelenti: $T_t^{X^n} := \{x^n \in X^n \mid t_{x^n} = t\}$, ahol t_{x^n} az x^n empirikus eloszlását jelöli.

Jelen esetben a típusosztályokat úgy kapjuk, hogy a definícióban X^n helyett $\mathcal{H}_{A^n}$ -nek az $(\{|x\rangle\}_{x \in X})^{\otimes n}$ bázisát, x^n helyett pedig $|x^n\rangle_{A^n}$ vektort vesszük, a tenzorsztoratban szereplő tagok tetszőleges permutációjának erejéig. A típusosztályok számának felső korátja $(n+1)^{|X|}$. A δ -tipikus típusokat az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\tau_\delta := \{t : \forall x \in X, |t(x) - p_X(x)| \leq \delta, \text{ ha } p_X(x) > 0, t(x) = 0 \text{ különben}\}.$$

A τ_δ -ban lévő típusosztályok uniojaként egy erősebb verzióját vezethetjük be a tipikus altér fogalmának, amit *erősen δ -tipikus altérnek* nevezünk és $T_\delta^{X^n}$ -el jelöljük. Ez a gyengén tipikus altérhez hasonló tulajdonságokkal bír.

A bevezetőt még egy az aszimptotikus vizsgálati körben használatos fogalom ismertetésével zárom. Egy adott transzformáció *rátája* alatt azt a maximális arányt értjük, hogy egy kiinduló állapot másolatainak számához viszonyítva mennyi másolatát tudjuk előállítani a célállapotnak a transzformáció segítségével, midőn a kiinduló állapot másolatainak számával a végtelenbe tartunk.

2. LOSR

Most, hogy a szükséges fogalmakat bevezettük, az LOSR transzformáció vizsgálatára térhetünk. Jelen kutatómunkában tiszta állapotok között vizsgáljuk a transzformációt. A kiinduló állapotunk legyen $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(\otimes_{i=1}^k \mathcal{H}_i))$, a célállapotunk pedig $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(\otimes_{i=1}^k \mathcal{K}_i))$, tehát a rendszerünk k -résztű. A definícióból világos, hogy $\varrho \xrightarrow{\text{LO}} \sigma \iff \varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$, ha pedig ezentúl ϱ is tiszta, abban az esetben a [2] cikk 3. lemmája alapján $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$ ekvivalens egy $|\eta\rangle\langle\eta|$ szorzat és egy $|\xi\rangle\langle\xi|$ tiszta állapot létezésével, úgy hogy $\varrho \otimes |\eta\rangle\langle\eta|$ és $\sigma \otimes |\xi\rangle\langle\xi|$ lokálisan unitérekvivalensek. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy léteznek $\{\mathcal{K}'_i\}_{i \in [k]}$ Hilbert-terek és $V_i : \mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{K}'_i$ izometriák, amelyekkel fennáll, hogy $\sigma = \text{Tr}_{\otimes_{i \in [k]} \mathcal{K}'_i} ((\otimes_{i \in [k]} V_i) \varrho (\otimes_{i \in [k]} V_i)^*)$. Ez alapján mindent ekvivalensnek tekinthetünk lokális izometriák és nagyobb terekbe való lokális izometrikus beágyazások erejéig.

A ráták definiálásához használjuk most a purifikált távolságot metrikaként. A transzformáció során $(0,1) \ni \varepsilon$ -nyi hibát megengedve, ezzel egy, az LOSR-t közelítő transzformációt bevezetve, azt mondjuk, hogy $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}}_\varepsilon \sigma$, ha létezik $\sigma' \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(\otimes_{i=1}^k \mathcal{K}_i))$, amire $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma'$ és $D(\sigma, \sigma') < \varepsilon$ teljesül. A ϱ és σ állapotokra az LOSR transzformáció rátája:

$$R_{\text{LOSR}}(\varrho \rightarrow \sigma) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max\{m \in \mathbb{N} \mid \varrho^{\otimes n} \xrightarrow{\text{LOSR}}_\varepsilon \sigma^{\otimes m}\}.$$

Ezt összehasonlíthatjuk az LOCC transzformáció rátájával:

$$R_{\text{LOCC}}(\varrho \rightarrow \sigma) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max\{m \in \mathbb{N} \mid \varrho^{\otimes n} \xrightarrow{\text{LOCC}}_\varepsilon \sigma^{\otimes m}\}.$$

Mivel az LOCC transzformációk önmagukba foglalják az LOSR transzformációkat, a rátákra az alábbi egyenlőtlenség teljesül: $R_{\text{LOSR}}(\varrho \rightarrow \sigma) \leq R_{\text{LOCC}}(\varrho \rightarrow \sigma)$.

Vizsgálódásunkat most a $k = 2$ esetre korlátozzuk, a kétrésztű, tiszta állapotok közötti, közelítő LOSR transzformáció létezésére szeretnénk feltételeket szabni. Ebben az esetben nagy könnyebbséget jelent, hogy használhatjuk az állapotok Schmidt-felbontását. Jelöljük P -vel, illetve Q -val a ϱ , illetve σ állapotok (1)-szerinti felbontásával kapott együtthatókat. A tiszta állapotok transzformációjára vonatkozó megfontolásunk jelen speciális esetben azt jelenti, hogy $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$ akkor, és csak akkor teljesül, ha létezik egy R eloszlás, amivel a $Q \otimes R$ permutációktól és 0-kal való kiegészítésektől eltekintve megegyezik a P -vel. De mi a helyzet $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}}_\varepsilon \sigma$ -val?

Lemma. *Legyen $\varepsilon \in (0,1)$, $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2))$ tiszta állapot, úgy hogy $D(\varrho_1, |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|) \leq \varepsilon$, valamely $|\varphi_1\rangle$ egységvektorára $\mathcal{H}_1$ -nek. Ekkor létezik egy $|\varphi_2\rangle$ egységvektor $\mathcal{H}_2$ -ben, amire $D(\varrho, |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| \otimes |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|) \leq \sqrt{2}\varepsilon$ teljesül.*

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}(X)$ és $Q \in \mathcal{P}(Y)$. Ezen lemma segítségével belátható a következő tétel.

Tétel. *$\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}}_\varepsilon \sigma$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik egy $R \in \mathcal{P}(Z)$ valószínűségi eloszlás, és egy $\sigma : X \rightarrow Y \times Z$ injektív függvény, amire $D(Q \otimes R, \sigma_*(P)) \leq \varepsilon$.*

2. LOSR

Ezzel a rátát az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$R_{\text{LOCC}}(\varrho \rightarrow \sigma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max\{m \in \mathbb{N} \mid \exists R, \sigma : D(Q^{\otimes m} \otimes R, \sigma_*(P^{\otimes n})) \leq \varepsilon\}.$$

A tételben szereplő σ minimalizálja a távolságot, tekintettel arra, hogy az eloszlások sorrendjét tetszőlegesen változtathatjuk a lokális unitér invarianciának köszönhetően. Ezért, mivel az állapotok LOSR konvertálhatóságát vizsgáljuk, bevezetnünk egy új metrikát, ami az eddig használt purifikált távolságnak, az állapotok a lokális unitérekkel való konjugálására, vagy ha úgy tetszik, a valószínűségi eloszlások permutálásra való minimalizálása. Ez éppen akkor teljesül, mikor az állapotokhoz tartozó valószínűségi eloszlások csökkenő sorrendben vett pontonkénti távolságát vesszük. Ezt a távolságot jelöljük $d^\downarrow(\cdot, \cdot)$ -el.

Most megmutatjuk, hogy az entrópia monoton csökken a kétrészű tiszta állapotokon vett LOSR transzformáció során. Tegyük fel, hogy ϱ állapotot 1 rátával áttudjuk transzformálni σ -ba, ez azt jelenti, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \min_R d^\downarrow(Q^{\otimes n} \otimes R, \cdot P^{\otimes n}) = 0$ teljesül. $H(Q^{\otimes n} \otimes R) = nH(Q) + H(R) \geq nH(Q)$. A Hilbert-terek dimenzióját d -vel jelölve, a Fannes-Audeaert egyenlőtlenséget használva, a metrikák közötti összefüggésre való tekintettel írhatjuk, hogy

$$|H(P^{\otimes n}) - H(Q^{\otimes n} \otimes R)| \leq d^\downarrow(Q^{\otimes n} \otimes R, P^{\otimes n}) \cdot \log(d^n) + h_2(d^\downarrow(Q^{\otimes n} \otimes R, P^{\otimes n})).$$

Az előző két egyenlőtlenséget felhasználva, illetve az egyszerűsítéseket elvégezve:

$$H(Q) \leq H(P) + d^\downarrow(Q^{\otimes n} \otimes R, P^{\otimes n}) \cdot \log(d) + \frac{1}{n} h_2(d^\downarrow(Q^{\otimes n} \otimes R, P^{\otimes n})),$$

ami az $n \rightarrow \infty$ esetben éppen a $H(P) \geq H(Q)$ feltételt adja.

Azt sejtjük, hogy az entrópia varianciájának is monoton csökkennie kell, ám azt még nem tudtuk ilyen egyszerűen belátni. A tervünk, hogy a kiinduló állapotok összességét típusosztályokra bontjuk, amikben már egyenletes eloszlások fognak megjelenni, ezzel könnyítve a számolást, majd a típusosztályok szerint összegezve hasonló korlátot monhatunk $V(Q)$ -ra. Ezentúl azt reméljük, hogy ezen két monoton mennyiséggel elégséges feltételt is szabhatunk a transzformálhatóságra.

Hivatkozások

- [1] Milán Mosonyi. Quantum information theory, 2023. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem. Még nem publikált előadás jegyzet.
- [2] David Schmid, Thomas C. Fraser, Ravi Kunjwal, Ana Belen Sainz, Elie Wolfe, and Robert W. Spekkens. Understanding the interplay of entanglement and nonlocality: motivating and developing a new branch of entanglement theory. *Quantum*, 7:1194, December 2023.
- [3] Mark M. Wilde. *Quantum Information Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition, February 2017.