

Aszimptotikus összefonódás-transzformációk

Zöldy Márton

Témavezető: Vrana Péter

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

2025. június 6.

- Véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modell:
 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}); \mathcal{S}(\mathcal{A}); \text{CPTP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

- Véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modell
- Állapotok

- Véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modell
- Állapotok:
tisztá, kevert, vektor, szorzat, szeparálható, összefonódott

- Véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modell
- Állapotok:

Schmidt-felbontás

$$\psi \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}} \quad \longrightarrow \quad \psi = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} e_i \otimes f_i$$

- Véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modell
- Állapotok
- Metrikák, mennyiségek

- Véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modell
- Állapotok
- Metrikák, mennyiségek:

Nyom-norma távolság

$$\|\varrho - \sigma\|_1 := \text{Tr}(|\varrho - \sigma|), \quad \text{ahol } |A| = \sqrt{A^*A}$$

- Véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modell
- Állapotok
- Metrikák, mennyiségek:

Fidelity

$$F(\varrho, \sigma) := \|\sqrt{\varrho}\sqrt{\sigma}\|_1$$

Purifikált távolság

$$D(\varrho, \sigma) := \sqrt{1 - (F(\varrho, \sigma))^2}$$

- Véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modell
- Állapotok
- Metrikák, mennyiségek:

$$1 - \sqrt{F(\varrho, \sigma)} \leq \frac{1}{2} \|\varrho - \sigma\|_1 \leq 1 + \sqrt{F(\varrho, \sigma)}$$

- Véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modell
- Állapotok
- Metrikák, mennyiségek:

Entrópia

$$H(\varrho) := -\mathrm{Tr} \varrho \log \varrho$$

Entrópia variancia

$$V(\varrho) := \mathrm{Tr} \varrho (\log \varrho)^2 - (H(\varrho))^2$$

- Véges dimenziós operátoralgebrai statisztikus modell
- Állapotok
- Metrikák, mennyiségek:

Fannes-Audeaert egyenlőtlenség

$$\varrho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) : \quad |H(\varrho) - H(\sigma)| \leq \frac{1}{2} \|\varrho - \sigma\|_1 \cdot \log(\dim \mathcal{H} - 1) + h_2(\|\varrho - \sigma\|_1)$$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$

Lokális operáció

$$\varrho \xrightarrow{\text{LO}} \sigma : \quad \begin{array}{l} \varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_A \otimes \mathcal{A}_B), \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{A'} \otimes \mathcal{A}_{B'}) \\ \exists \Phi_A \in \text{CPTP}(\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_{A'}), \Phi_B \in \text{CPTP}(\mathcal{A}_B, \mathcal{A}_{B'}) : \\ \Phi_A \otimes \Phi_B(\varrho) = \sigma \end{array}$$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$

Lokális operáció és korrelált véletlen

$$\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma : \quad \sigma \in \text{conv}\{\tau \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{A'} \otimes \mathcal{A}_{B'}) \mid \varrho \xrightarrow{\text{LO}} \tau\}$$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$
- Tiszta állapotokra [Schmid et al., 2023]:

$$\varrho \in \mathcal{S}(\otimes_{i=1}^k \mathcal{H}_i), \quad \sigma \in \mathcal{S}(\otimes_{i=1}^k \mathcal{K}_i)$$

$$\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma \iff \exists \{\mathcal{K}'_i\}_{i \in [k]}, \exists V_i : \mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{K}'_i :$$

$$\sigma = \text{Tr}_{\otimes_{i \in [k]} \mathcal{K}'_i} \left(\left(\otimes_{i \in [k]} V_i \right) \varrho \left(\otimes_{i \in [k]} V_i \right)^* \right)$$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$
- Tiszta állapotokra [Schmid et al., 2023]:
- Kétrésztű tiszta állapotokra:

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \ni \varrho = |\psi_P\rangle\langle\psi_P|, \quad \mathcal{S}(\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_1) \ni \sigma = |\psi_Q\rangle\langle\psi_Q| :$$

$$|\psi_P\rangle = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sqrt{P_x} \cdot |x\rangle \otimes |x\rangle, \quad |\psi_Q\rangle = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sqrt{Q_y} \cdot |y\rangle \otimes |y\rangle; \quad P \in \mathcal{P}(\mathcal{X}), Q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$$

$$\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma \iff \exists R \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}) : \quad Q \otimes R \simeq P$$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$
- Tiszta állapotokra [Schmid et al., 2023]:
- Kétrészű tiszta állapotokra:
- Aszimptotikusan:

Közelítő LOSR transzformáció

$$\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}}_{\varepsilon} \sigma \iff \exists \sigma' \in \mathcal{S}(\otimes_{i=1}^k \mathcal{K}_i) : \quad \varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma \text{ és } D(\sigma, \sigma') < \varepsilon$$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$
- Tiszta állapotokra [Schmid et al., 2023]:
- Kétrészű tiszta állapotokra:
- Aszimptotikusan:

LOSR transzformáció rátája

$$R_{\text{LOSR}}(\varrho \rightarrow \sigma) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max\{m \in \mathbb{N} \mid \varrho^{\otimes n} \xrightarrow{\text{LOSR}}_{\varepsilon} \sigma^{\otimes m}\}$$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$
- Tiszta állapotokra [Schmid et al., 2023]:
- Kétrészű tiszta állapotokra:
- Aszimptotikusan:

Tétel

$\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}}_{\varepsilon} \sigma$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik egy $R \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ valószínűségi eloszlás, és egy $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ injektív függvény, amire $D(Q \otimes R, \sigma_*(P)) \leq \varepsilon$.

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$
- Tiszta állapotokra [Schmid et al., 2023]:
- Kétrészű tiszta állapotokra:
- Aszimptotikusan:

LOSR ráta kétrészű, tiszta állapotokra

$$R_{\text{LOCC}}(\varrho \rightarrow \sigma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max\{m \in \mathbb{N} \mid \exists R, \sigma : D(Q^{\otimes m} \otimes R, \sigma_*(P^{\otimes n})) \leq \varepsilon\}$$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$
- Tiszta állapotokra [Schmid et al., 2023]:
- Kétrészű tiszta állapotokra:
- Aszimptotikusan:

Állítás

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_R d^\downarrow(Q^{\otimes n} \otimes R, P^{\otimes n}) = 0 \quad \implies \quad H(P) \geq H(Q)$$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$
- Tiszta állapotokra [Schmid et al., 2023]:
- Kétrészű tiszta állapotokra:
- Aszimptotikusan:
- Entrópia variancia jellegű mennyiségek aszimptotikus monotonitása, CHT [Yamaguchi et al., 2025, Yamaguchi and Tajima, 2023]:

Ha ψ tiszta állapot, $\{\varrho_m\}_m$, $\varrho_m \in B^\varepsilon(\psi^{\otimes [Rm]})$, ha m elég nagy: $\exists \delta^f(\varepsilon)$, amire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta^f(\varepsilon) = 0 \text{ és}$$

$$I^f(\varrho_m, H_{[Rm]}) \geq V(\psi^{\otimes [Rm]}, H_{[Rm]}) - m\delta^f(\varepsilon) + o(m), \text{ midőn } m \rightarrow \infty.$$

$$H_{[Rm]} := \sum_{n=1}^{Rm} \mathbb{1}^{\otimes (n-1)} \otimes H \otimes \mathbb{1}^{\otimes (Rm-n)}$$

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOSR}} \sigma$
- Tiszta állapotokra [Schmid et al., 2023]:
- Kétrészű tiszta állapotokra:
- Aszimptotikusan:
- Entrópia variancia jellegű mennyiségek aszimptotikus monotonitása, CHT [Yamaguchi et al., 2025, Yamaguchi and Tajima, 2023]:
 Analógiák:

$$\begin{array}{ccc} H & \longleftrightarrow & \log \varrho \\ I^f(\varrho, H) & \longleftrightarrow & V(\varrho) \end{array}$$

Köszönöm a figyelmet!



Schmid, D., Fraser, T. C., Kunjwal, R., Sainz, A. B., Wolfe, E., and Spekkens, R. W. (2023).

Understanding the interplay of entanglement and nonlocality: motivating and developing a new branch of entanglement theory.

Quantum, 7:1194.



Yamaguchi, K., Mitsuhashi, Y., Shitara, T., and Tajima, H. (2025).

Quantum geometric tensor determines the i.i.d. conversion rate in the resource theory of asymmetry for any compact lie group.



Yamaguchi, K. and Tajima, H. (2023).

Smooth metric adjusted skew information rates.

Quantum, 7:1012.