

A Newton–Raphson-iteráció dinamikája

Kutatómunka 2.

Szerző: Sidó Dávid
Témavezető: Sigray István

2025. május 25.

1. Bevezetés

A függvények zérushelyeinek megtalálása fontos szerepet játszik a matematika összes területén, az analízisben kiváltképp. Néha az egyenlet megoldható algebrailag, legtöbbször azonban (például valós életbeli problémáknál gyakran) approximációs eljáráshoz kell folyamodnunk, így a pontos értéket csak jó közelítéssel kaphatjuk meg. Eerre Sir Isaac Newton, valamint kortársa és barátja, Joseph Raphson fejlesztettek ki numerikus módszert, melynek speciális eseteit az ókorban is ismerték, többek között Görögországban (Hérón), Perzsiában, sőt a babiloniaiak sokkal előtűk jártak.

Hátránya viszont, amellet, hogy időigényes, nem minden kezdőérték esetén konvergál. Érdekes kérdés, hogy a divergenciához vezető pontok halmazának van-e belseje a síkon, vagy egy kis perturbáció képes javítani a helyzeten. Ez szoros kapcsolatban áll a komplex dinamika egyik alapvető fogalmával, a hiperbolikus leképezésekkel, illetve még egy sejtéssel is, nevezetesen azzal, hogy a d -edfokú hiperbolikus racionális törtfüggvény sűrű részhalmazt alkotnak a d -edfokú racionális törtfüggvények terében.

2. Elméleti összefoglaló

2.1. A Newton–Raphson-iteráció

Mielőtt belekezdenénk a hiperbolikus leképezések tárgyalásába, nagyon röviden elevenítsük fel a módszer működési elvét. Adott egy f valós függvény, amely folytonos az $[a, b]$ intervallumon és deriválható (a, b) -n. Ha a végpontokban felvett értékek előjele különbözik, akkor a Bolzano-tétel miatt f metszi az x -tengelyt, mondjuk, a -ban. A gyökkeresés egy becsléssel indul, azaz választunk egy x_0 számot, majd itt felírjuk az elsőrendű Taylor-polinomot, ami körülötte lineárisan jól közelít:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Geometriailag ez éppen az $(x_0, f(x_0))$ pontba húzott érintőnek felel meg. A feltevés az, hogy ez a valódi gyökhöz egy x_0 -nál közelebbi x_1 pontban metszi az x -tengelyt, ami a következőképp áll elő:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

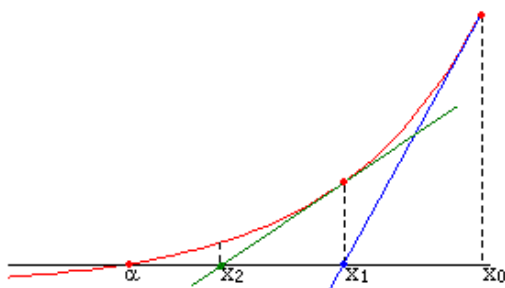
Ezt a rekurzív formulát ismételve kapjuk egyre jobb becslések a -hoz tartó sorozatát. Például a $\sqrt{2}$ ilyen módon történő kiszámítása az $f(x) = x^2 - 2$ függvény segítségével már csupán három iteráció után öt tizedesjegy pontosságú, a negyedik ezt kilencre növeli.

Amint említettem, sajnos a módszer nem problémamentes. Az alábbiak bármelyike felmerülhet:

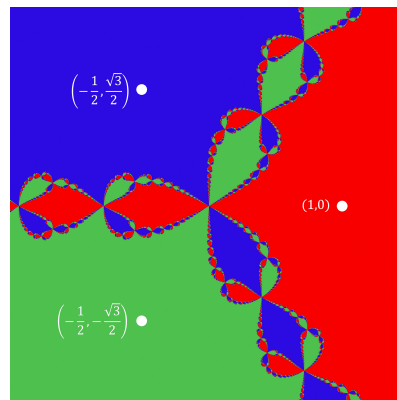
- Ha a derivált valamely iteráció során 0 (vízszintes érintő), akkor az osztás nem értelmezett (nincs metszet), s a folyamat leáll. Ez könnyedén orvosolható a választás módosításával.
- Ha a függvény nem differenciálható a zérushelyén, akkor a sorozat divergens. Ugyanez megtörténhet akkor is, ha az eredeti becslés a valódi gyöktől távol esik, vagy ha a derivált túl kicsi.
- Ha a zérushely éppen inflexió pont, akkor a sorozat ciklizál.

- A függvény lokális viselkedésétől függően a konvergencia lelassulhat, vagy akár egy teljesen másik gyökhöz tarthat. Ezt szemlélteti komplexben a Newton-fraktál.

Komplex esetben hasonló a felállítás. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, ahol $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány (nemüres, nyílt, összefüggő halmaz). A rekurzió nem változik, a különbség annyi, hogy több gyök esetében a sík felbomlik vonzási tartományokra, amelyek határa, a Julia-halmaz fraktálokra jellemző tulajdonságokat mutat. Ennek fényében a dolgozat témája tehát az, hogy emellett létezik-e olyan függvény és pont, amelynek még egy kis környezetének egyetlen pontjából indítva sem konvergál a Newton-iteráció.



(a) A módszer **szemléltetése** valós esetben



(b) Az $f(z) = z^3 - 1$ **tartományai** színekódolva

1. ábra

2.2. Hiperbolikus leképezések

Ezt az alfejezetet a hiperbolikus leképezések tömör bemutatásának szentelem, a kíváncsi Olvasó bővebb információkat talál John Milnor könyvében [1].

A racionális törtfüggvények terének egy különleges és sokat tanulmányozott részhalmazát alkotják. Attól lesz egy $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ racionális törtfüggvény hiperbolikus, hogy a kritikus pontjai (azon z_0 pontok, ahol $R'(z_0) = 0$) vonzó vagy szupervonzó periodikus ponthoz vagy pályához tartanak. A beszédes név geometriai analógiát takar, mert ezen leképezések expanzívak a Julia-halmazukon.

Sullivan 80-as évekbeli eredményeiből következik, hogy a hiperbolikus leképezések Fatou-halmazai komponenseinek az iterált képei valamikortól egy vonzó vagy szupervonzó periodikus pont vonzási tartománya lesz. Mindez azt jelenti, hogy a hiperbolikus leképezések dinamikájáról elég sok mindent lehet látni, ha a leképezés kritikus pontjainak ismerjük a pályáját. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy a fenti állítások nem igazak egész függvényekre.

A holomorf dinamika egyik legkézenfekvőbb alkalmazása, amikor egy $g(z)$ függvényhez hozzárendeljük a Newton-iterációját, tehát az $R(z) = z - \frac{g(z)}{g'(z)}$ leképezést, ezért azt tűztem ki célul, hogy megvizsgálom a viselkedést dinamikai szempontból. A harmadfokú polinomokra fókuszáltam, hogy miért épp azokra, később kiderül. Ekkor

$$R'(z) = \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2},$$

így a Newton-iteráció kritikus pontjai f zérushelyei és a második derivált egyetlen gyöke.

3. Projektmunka

Hogy a bonyolultabb esetet könnyebben elsajátítsuk, először nézzük meg mi történik, ha a célfüggvény kvadratikussá, azaz másodfokú polinom. Tekintsünk két speciális függvényt. Legyen $f(z) = z^2 + 1$ és $g(z) = z^2$. Az első esetben f -nek két különböző zérushelye van: $\pm i$, ezek R kritikus pontjai. Mindkettő szupervonzó, tehát a valós tengelyen kívül bárhol is indítjuk a folyamatot, a sorozat elég gyorsan

a közelebbi gyökhöz fog konvergálni, a valós tengelyen viszont megreked, mert az eredmény sosem lesz komplex, hacsak nem perturbáljuk a pontot úgy, hogy egy kis komplex részt is adunk hozzá. Ez azt jelenti, hogy a két gyökhöz tartozik egy-egy vonzási tartomány, amelyek határa alkotja a Julia-halmazt, hiszen most nincs belső pont. A második esetben egy kettős multiplicitású zérushely van. Itt $R(z) = \frac{z}{2}$, ezért a ∞ pontot kivéve az összes orbit az origóba tart, azonban jóval lassabb ütemben. Innentől kezdve kizárjuk a többszörös gyököket.

A harmadfokúaknál azonban merőben más a helyzet, ugyanis létezik olyan $p(z)$ polinom, $z_0 \in \mathbb{C}$ szám és $\varepsilon > 0$, hogy minden $w_0 \in B_\varepsilon(z_0)$ -ra, azaz egy kis környezetben a Newton-iteráció nem konvergál gyökhöz. Ezeket stabilan rossz pontoknak hívjuk.

A kutatásom során én a $p(z) = z(z-1)(z-\alpha)$ normált alakban megadott polinomokkal kísérleteztem. A fenti elemzésből adódik, hogy az egyik lehetőség az ilyen elfajult esetek kifürkészésére, hogy $p''(z)$ gyökét választjuk kiindulási értékül (mivel f zérushelyei nem mozognak) úgy, hogy kettes ciklusba kerüljön. Ekkor $(R \circ R)(z_0) = z_0$ és $(R \circ R)'(z_0) = 0$, így z_0 szupervonzó fixpontja $R \circ R$ -nek, vagyis még egy kis környezete sem fog konvergálni, mert maga felé húzza az egészet. A másik módszernél nagy számú véletlen próbálkozást alkalmazunk.

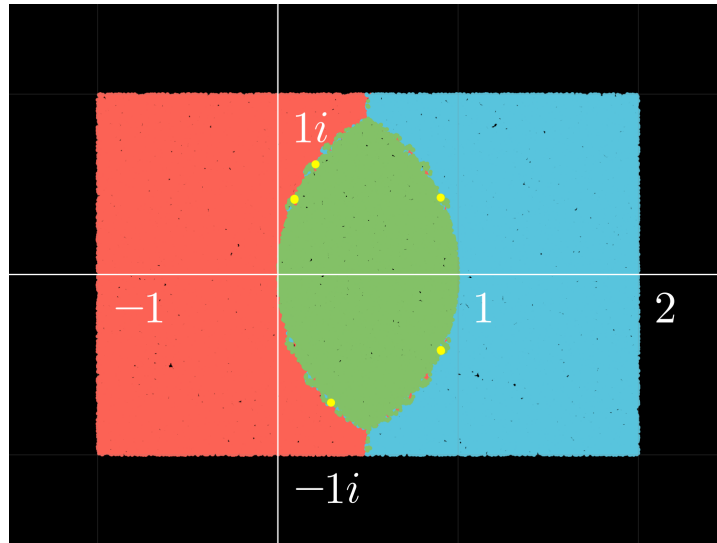
3.1. Rögzített eset

Harmadfokú esetben R -nek négy kritikus pontja van, ami a konkrét példánkban $0, 1, \alpha$ és $\beta := p''(z) = \frac{\alpha+1}{3}$. Tehát a feladat kiszámítani azt a β -t, amire $(R \circ R)(\beta) = \beta$, de $\beta \neq 0, 1, \alpha$. Ehhez írtam egy C++ programot, amiben implementáltam a Newton-iterációt az $(R \circ R)(\beta) - \beta$ függvényre, hogy kiszámoljam a megoldást. A program hat komplex gyököt (három konjugált párt) adott ki:

$$\beta_{1,2} = 0,364704 \pm 0,141172i \quad \beta_{3,4} = 0,5 \pm 0,750027i \quad \beta_{5,6} = 0,635296 \pm 0,141172i$$

3.2. Randomizált eset

A másik lehetőségnél a $[-1, 2] \times [-1, 1]$ téglalapot vettem alapul, ahol a program véletlenszerűen generált 100.000 darab kezdőértéket, és mindegyikre megnézte, hogy száz iteráció után hová tart a Newton-leképezés, melyik gyökhöz közelít, ha egyáltalán. Tehát a konvergenciatípusnak megfelelően kategóriákba sorolta a pontokat, ezért szemléltetésképpen csináltam hozzá a Manim nevű animációkészítő programmal egy ábrát, amin jól látszik, hogy a pontok túlnyomó többsége konvergál (pirosak a 0-hoz, kék az 1-hez, zöld az α -hoz), ám ismét akad néhány renitens pont (ezek sárgával jelölve), amelyek stabilan ciklizálnak, a program szerint négy-hosszú ciklusban. Megjegyzem, egyrészt korántsem biztos, hogy az összeset megtaláltam ezzel, másrészt pedig, ha a gyökök irracionálisak, akkor a stabilitás automatikusan teljesül, mert a gép eleve csonkolt számokkal dolgozik.



2. ábra

3.3. Perturbálás

Röviden szeretnék még kitérni egy központi dologra, ami rávilágít arra, hogy miért tipikus eset, amit az imént tapasztaltunk.

3.3.1. Sejtés. *A d -edfokú hiperbolikus leképezések sűrű nyílt részhalmaza alkotnak a d -edfokú racionális törtfüggvények terében.*

Ebből a nyíltság ismert tény, ami azt jelenti, hogy a hiperbolikus leképezések stabilak abban az értelemben, hogy ha az együtthatókat perturbáljuk, az új függvény hiperbolikus marad. A sűrűség ellenben arra utal, hogy egy nemhiperbolikus leképezés is hiperbolikussá tehető perturbációval.

3.4. Javíthatóság

Egy további fontos kérdést viszont eddig megválaszolatlanul hagytam. Vajon mindig orvosolható a szituáció, mindig elérhető, hogy a Newton-leképezés konvergáljon? A kiábrándító válasz az, hogy sajnos csupán harmadfokúak esetében van kiút. Curt McMullen, Fields-medálos matematikus bebizonyította [2], hogy ha veszünk egy $p(z) = z^3 + az + b$ alakra normált polinomot, majd $3az^2 + 9bz - a^2$ -tel leosztva megkapjuk belőle $q(z)$ -t, és erre hajtjuk végre a Newton-iterációt, vagyis a

$$T_p(z) = z - \frac{(z^3 + az + b)(3az^2 + 9bz - a^2)}{3az^4 + 18bz^3 - 6a^2z^2 - 6abz - 9b^2 - a^3}$$

formulát, akkor ez egy szuperkonvergens algoritmust nyújt a gyökök megkeresésére. Sikere abban áll, hogy $q(z)$ „inflexiós pontjai” (ahol $q''(z) = 0$) egybeesnek $p(z)$ zérushelyeivel. Azonban McMullen azt is belátta, hogy legalább negyedfokú esetben bármilyen iterációs gyökkeresési módszerhez található olyan polinom, és olyan w_0 , amelynek egy kis környezetéből indítva az iterációt, az nem fog konvergálni. Egyrészt e tény miatt foglalkoztam a harmadfokúakkal, mivel ekkor a második derivált lineáris függvény, tehát könnyen számolható, és csak egy sorozatot kell vizsgálni, illetve azt is be tudtam mutatni, hogy a klasszikus Newton–Raphson-iteráció javítására harmadfokú esetén van szép elmélet.

Hivatkozások

- [1] John Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, 3rd Edition, Princeton University Press, (2006).
- [2] Curt McMullen, Families of rational maps and iterative root-finding algorithms, *Annals of Mathematics*, **125** (3) (1987) 467–493. DOI: 10.2307/1971408