

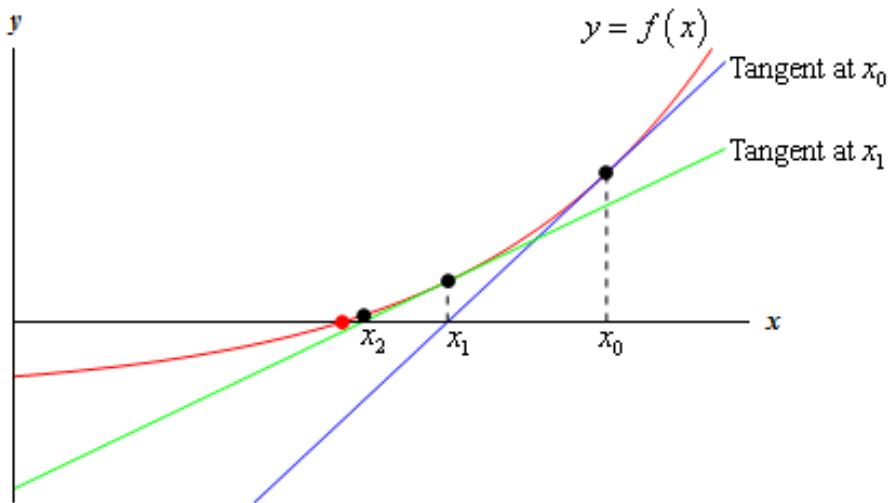
A Newton–Raphson-iteráció dinamikája

Sidó Dávid

Témavezető: Sigray István

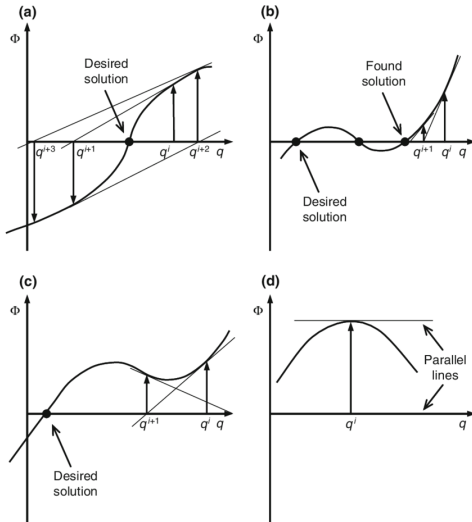
2025. június 6.

A Newton-iteráció valósban



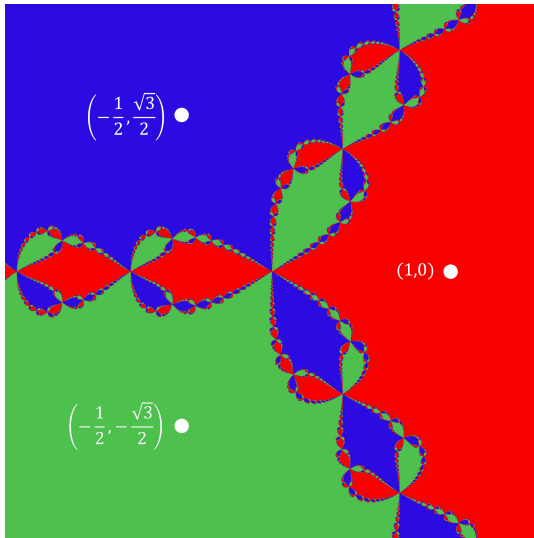
Forrás: <https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calci/newtonsmethod.aspx>

Amikor a módszer elbukik



Forrás: https://www.researchgate.net/figure/Examples-in-which-the-Newton-Raphson-method-fails-to-converge_fig26_299604992

A Newton-fraktál $z^3 - 1$ esetén



Forrás: <https://paulbourke.net/fractals/newtonraphson/>

Definíció

Egy $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ alakú racionális törtfüggvényt hiperbolikusnak nevezünk, ha a kritikus pontjai (ahol $R'(z_0) = 0$) vonzó vagy szupervonzó periodikus ponthoz vagy pályához tartanak.

Tétel (Sullivan)

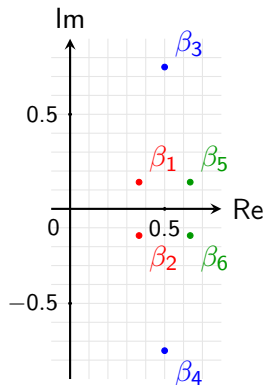
A hiperbolikus leképezések Fatou-komponenseinek az iterált képei valamikor-tól egy vonzó vagy szupervonzó periodikus pont vonzási tartománya lesznek.

$$f(z) \mapsto R(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

$$R'(z) = \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2}$$

A projektmunka I.

A $p(z) = z(z - 1)(z - \alpha)$ alakra normált harmadfokú polinomokkal foglalkoztam. A cél $p''(z)$ egyetlen gyökét, azaz $\beta := \frac{\alpha+1}{3}$ -et úgy megválasztani, hogy ciklizáljon. Tehát a feladat olyan β -t keresni, amire $R \circ R(\beta) = \beta$, de $\beta \neq 0, 1, \alpha$.



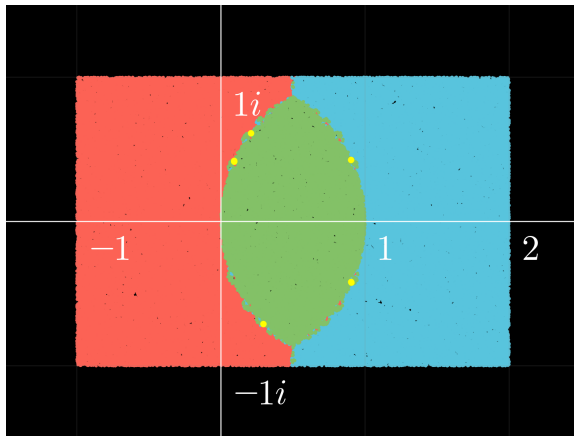
$$\beta_{1,2} = 0.364704 \pm 0.141172i$$

$$\beta_{3,4} = 0.5 \pm 0.750027i$$

$$\beta_{5,6} = 0.635296 \pm 0.141172i$$

A projektmunka II.

A másik lehetőség a $[-1, 2] \times [-1, 1]$ téglalapon belüli nagyszámú véletlen próbálkozás. Itt a program random generált sok ezer darab kezdőértéket, és mindre elvégzett egy százlépéses iterációt, mialatt regisztrálta a konvergenciátípust is. Az eredmény:



Sejtés

A d -edfokú hiperbolikus leképezések sűrű nyílt részhalmazt alkotnak a d -edfokú racionális törtfüggvények terében.

Kérdés

Mindig orvosolható a helyzet, vagyis mindig elérhető, hogy a Newton-iteráció konvergáljon?

Válasz (Curt McMullen): Sajnos csupán harmadfokú esetben van kiút.

$$p(z) = z^3 + az + b \mapsto T_p(z) = z - \frac{(z^3 + az + b)(3az^2 + 9bz - a^2)}{3az^4 + 18bz^3 - 6a^2z^2 - 6abz - 9b^2 - a^3}$$

Köszönöm a figyelmet!