

Nemkommutatív Iwasawa-elmélet:  
Akashi sorok és Euler karakterisztika  
Egyéni kutatómunka II

Pálffy Patrik  
Témavezető: Zábrádi Gergely

2025 Tavasz

# 1. fejezet

## Bevezetés

A dolgozat bevezetést nyújt a csoporthomológiába és a K-elméletbe, majd definiáljuk az Akashi-sorokat is, amelyek az Euler karakterisztikához hasonlóan hasznos eszköznek bizonyultak.

Definiáljuk fogjuk a homológia csoportokat, Tor és Ext funktorokat, a csoporthomológia csoportokat és a  $K_0$  és  $K_1$  funktorokat a gyűrűkből az Abel csoportok kategóriájába.

Legyen  $G$  egy kompakt  $p$ -adikus Lie csoport, aminek nincs  $p$ -ad rendű eleme és létezik egy zárt normálosztója  $H$  úgy, hogy  $\Gamma = G/H \simeq \mathbb{Z}_p$ . Definiálni fogjuk az  $S^*$  Ore halmazt, amely a kommutatív algebrából ismert lokalizálást általánosítja nemkommutatív esetre. Az előző félévben megismert Iwasawa algebrát  $\Lambda(G) = Z[[G]]$ -vel fogjuk jelölni és legyen  $M(p)$  az  $M$   $\Lambda(G)$ -modulus véges rendű elemeiből képzett részmodulus. A fókuszunkban a  $\mathfrak{M}_G(H)$  a végesen generált  $S^*$  torzió  $\Lambda(G)$ -modulusok kategóriája áll.

Végezetül megszeretnénk érteni az  $\mathfrak{M}_G(H)$  beli modulusok karakterisztikus elemeit  $K_1(\Lambda(G)_{S^*})$ -ben, ehhez fogjuk használni az Akashi sorokat, amely az alábbi csoporthomomorfizmus

$$Ak : K_0(\mathfrak{M}_H(G)) \rightarrow \mathcal{Q}(\Gamma)^\times / \Lambda(\Gamma)^\times$$

$$Ak(M) = \prod_{0 \leq i} f_{i,M}^{(-1)^i},$$

ahol  $f_{i,M}$  a  $H_i(H, M)$  csoport, mint  $\Lambda(\Gamma)$ -modulus karakterisztikus hatványsorai.

## 2. fejezet

# Csoporthomológia

### 2.1. Homológia[2]

A homológia elmélete topológiából származik. Topologikus értelemben többféleképpen is definiálható egy sokaságon.

**2.1.1. Definíció.** Legyen  $C = (C_n, \partial_n)$  lánckomplexus, ahol minden  $n \in \mathbb{Z}$ -re  $C_n$ -ben félegzakt.  $(\partial_{n-1}\partial_n = 0)$  Ekkor a  $H_n(C) = \text{Ker}(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1})$  csoportot a  $C$  lánckomplexus  $n$ -edik homológia-csoportjának nevezzük.

**2.1.2. Definíció.** (szimpliciális komplexus) Legyen  $V = \{v_0, \dots, v_N\}$  csúcsok véges halmaza és  $\Lambda \subset \mathcal{P}(V)$  olyan részhalmaza a hatványhalmaznak, hogy ha  $A \in \Lambda$  akkor  $\forall B \subset A, B \in \Lambda$ .

**2.1.3. Definíció.** A  $n$ -láncai, a  $\Lambda$   $n$ -lapjai által generált szabad Abel-csoport

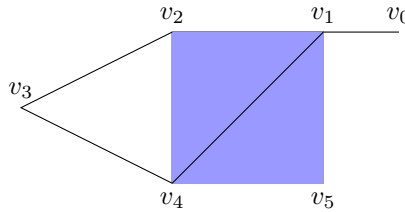
$$C_n(\Lambda) := \left\{ \sum_{f \in \Lambda_n} n_f f : n_f \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A határleképzést az  $n$ -lapokon definiáljuk  $\partial_n : C_n(\Lambda) \rightarrow C_{n-1}(\Lambda)$ , ha  $A \in \Lambda_n$  akkor  $A := [v_0, \dots, v_n]$ -ra

$$\partial_n(A) = \partial_n([v_0, \dots, v_n]) := \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

ahol  $\hat{v}_i$  azt jelöli, hogy az  $i$ -iket kihagyjuk és az indexeket növekvő sorrend szerint átindexeljük.

Nézzünk erre egy példát:



A  $V$  halmaz 6 elemből áll és  $\Lambda = V \cup \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_0\}, \{v_0, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_5\}\} \cup \{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_4, v_5\}\}$ . Ekkor  $C_2(\Lambda) = \mathbb{Z}^2$ ,  $C_1(\Lambda) = \mathbb{Z}^8$ ,  $C_0(\Lambda) = \mathbb{Z}^6$ . Nézzhetjük a következő lánckomplexust:

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^8 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^6 \xrightarrow{\partial_0} 0 \rightarrow \dots$$

Vegyük észre, hogy a 0-nál kisebb és 2-nál nagyobb homológia-csoportok izomorfak a 0 csoporttal. Továbbá  $H_2(C) = \text{Ker } \partial_2$ , mivel  $C_3 = 0$ , viszont  $\text{Ker } \partial_2$  is 0, mivel  $\partial_2([v_1, v_2, v_4]) = [v_2, v_4] - [v_1, v_4] + [v_1, v_2]$  és  $\partial_2([v_1, v_2, v_5]) = [v_2, v_5] - [v_1, v_5] + [v_1, v_2]$  közül egyik sem nulla és lineárisan függetlenek. Tudjuk, hogy  $\dim \text{Ker } \partial_i + \dim \text{Im } \partial_i = \dim C_i$ , ezért  $\text{Im } \partial_2 = \mathbb{Z}^2$ .  $\text{Ker } \partial_1$ -ben olyan lineáris kombinációi vannak az éleknek, amik kört alkotnak. Könnyű, de hosszas számítással leellenőrizhető, hogy csak 3 darab lineárisan független kör létezik a komplexusunkban, ezért  $H_1 = \mathbb{Z}$  és  $H_0 = \mathbb{Z}$ , mivel  $\mathbb{Z}^6/\mathbb{Z}^5 = \mathbb{Z}$ .

**2.1.4. Megjegyzés.** Intuitívan a homológia-csoportok megszámlálják az  $n$  dimenziós lyukakat a szimpliális komplexusunkban. Belátható az is, hogy  $H_0(\Lambda)$  pontosan az összefüggő komponensek számával egyezik meg.

## 2.2. Ext és Tor[4]

**2.2.1. Definíció.** (Projektív feloldás) Legyen  $M$   $R$ -mod.  $M$  projektív feloldásának nevezzük egy  $\mathcal{P} = \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  egzakt sorozatot, ahol  $P_i$  projektív  $R$ -mod minden  $i \geq 0$  esetén.

**2.2.2. Definíció.** Legyen  $\mathcal{P}$  az  $M$  modulus projektív feloldása és  $N$  egy  $R$ -modulus, ekkor

$$\text{Hom}(\mathcal{P}, N) := 0 \rightarrow \text{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{\partial_0} \text{Hom}(P_1, N) \xrightarrow{\partial_1} \text{Hom}(P_2, N) \rightarrow \dots$$

**2.2.3. Megjegyzés.** Példa:  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$

Nézzük  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , mint egy  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  modulus, feltéve, hogy  $n|m$ . Ekkor a projektív feloldás

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

az utolsó nem nulla leképezés  $x \mapsto x \bmod n$ , előtte  $x \mapsto nx$  ez előtti pedig  $x \mapsto \frac{m}{n}x$ , majd felváltakozva vesszük őket.

**2.2.4. Definíció.** Két  $R$ -modulus esetén  $M, N$ -re definiálhatjuk az Ext-jüket  $\text{Ext}_R^n(M, N) := H_n(\text{Hom}(\mathcal{P}, N))$ .

**2.2.5. Megjegyzés.**  $\text{Ext}_R^0(M, N) \simeq \text{Hom}_R(M, N)$

**2.2.6. Tétel.** Legeyn  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$   $R$ -modulusok rövid egzakt sorozata és  $M$   $R$ -modulus. Ekkor léteznek hosszú egzakt sorozatok:

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^0(M, A) \rightarrow \text{Ext}_R^0(M, B) \rightarrow \text{Ext}_R^0(M, C) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, A) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, B) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, C) \rightarrow \dots$$

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^0(C, M) \rightarrow \text{Ext}_R^0(B, M) \rightarrow \text{Ext}_R^0(A, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(C, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(B, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, M) \rightarrow \dots$$

**2.2.7. Megjegyzés.** Tudunk adni egy ekvivalens jellemzést a projektív és injektív modulusokra. Azt mondjuk, hogy  $P$   $R$ -modulus projektív, ha minden  $M$   $R$ -modulusra  $\text{Ext}_R^n(P, M) = 0$ . Hasonlóan  $I$   $R$ -modulus injektív, ha minden  $M$   $R$ -modulusra  $\text{Ext}_R^n(M, I) = 0$ .  $\forall n \geq 1$

**2.2.8. Definíció.** Legyen  $M$  bal  $R$ -modulus,  $N$  jobb  $R$ -modulus és  $\mathcal{P} \rightarrow N$  projektív feloldás, ekkor

$$\mathcal{P} \otimes_R M := \dots \rightarrow P_2 \otimes_R M \xrightarrow{\partial_1} P_1 \otimes_R M \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

**2.2.9. Definíció.** Legyen  $M$  bal,  $N$  jobb  $R$ -modulus, akkor  $\text{Tor}_n^R(N, M) := H_n(\mathcal{P} \otimes_R M)$ .

**2.2.10. Megjegyzés.**  $\text{Tor}_0^R(N, M) \simeq N \otimes_R M$ .

**2.2.11. Megjegyzés.** Ha  $M$  vagy  $N$  lapos (a modulussal való tenzorszorzat egzakt funktor), akkor  $\text{Tor}_n^R(M, N) = 0$  minden  $n \geq 1$  esetén.

## 2.3. Csoorthomológia[3]

**2.3.1. Definíció.** ( $G$ -modulusok) Legyen  $G$  egy csoport és  $M$  egy Abel csoport. Ekkor az  $(M, G)$  párt  $G$ -modulusnak nevezzük, ha létezik egy

$$(g, m) \mapsto gm : G \times M \rightarrow M$$

leképezés, hogy minden  $g, g' \in G, m, m' \in M$  -re

- $g(m + m') = gm + gm'$ ;
- $(gg')(m) = g(g'm)$ ;
- $1m = m$ .

**2.3.2. Megjegyzés.** A csoportalgebra  $\mathbb{Z}G$  egy szabad Abel csoport, aminek a bázisát  $G$  elemei alkotják, és a szorzást  $G$  hatása. Ekkor az elemei a végesen  $\mathbb{Z}$ -lineáris kombinációi  $G$  elemeinek

$$\sum_i n_i g_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad g_i \in G,$$

és a szorzás

$$\left( \sum_i n_i g_i \right) \left( \sum_j n'_j g'_j \right) = \sum_{i,j} n_i n'_j (g_i g'_j).$$

Így egy  $M$   $G$ -modulus kiterjeszthető egy  $\mathbb{Z}G$ -modulussá és egy  $G$ -modulus homomorfizmus akkor homomorfizmus, ha  $\mathbb{Z}G$ -modulus homomorfizmus is. Ezzel megegyeztetethetjük a  $G$ -modulus kategóriát a  $\mathbb{Z}G$ -modulus kategóriával.

**2.3.3. Definíció.** Legyen  $G$  egy csoport és  $M$  bal  $\mathbb{Z}G$ -modulus. Ekkor  $M$ -nek az  $n$ -edik kohomológiacsoportha  $H^n(G, M) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, M)$ .

**2.3.4. Definíció.** Legyen  $G$  egy csoport és  $M$  bal  $\mathbb{Z}G$ -modulus. Ekkor  $M$ -nek az  $n$ -edik homológiacsoportha  $H_n(G, M) = \text{Tor}_{\mathbb{Z}G}^n(M, \mathbb{Z})$ .

**2.3.5. Megjegyzés.**  $\mathbb{Z}$ -nek létezik  $\mathbb{Z}G$  feletti projektív feloldása minden csoportra.

**2.3.6. Megjegyzés.** Számunkra  $\mathbb{Z}_p$  feletti csoportkohomológia kell, viszont ezt megtehetjük, mivel  $\mathbb{Z}_p G$  is egy  $G$ -modulus.

**2.3.7. Megjegyzés.** Definiálhatjuk a  $\varphi : G \rightarrow M$  kereszt homomorfizmust, amire teljesül, hogy  $\varphi(\sigma\tau) = \sigma\varphi(\tau) + \varphi(\sigma)$ ,  $\forall \sigma, \tau \in G$ . Ha minden  $m \in M$ -re teljesül, hogy  $\sigma \mapsto \sigma m - m$  egy kereszt homomorfizmus, akkor principális kereszt homomorfizmusnak hívjuk. Ekkor  $A$  Abel csoportra definiálhatjuk  $H^1(G, A)$ -t, ami egyenlő  $H^1(G, A) = \{\text{kereszt homomorfizmusok}\} / \{\text{principális kereszt homomorfizmusok}\}$ . Ha  $G$  triviálisan hat  $A$ -n akkor  $\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\tau)$ , ezért csoportkohomorfizmus is lesz.

**2.3.8. Megjegyzés.** Nézzünk is egy használatát kocsoporthomológiára:

**Állítás.** Legyen  $L/K$  egy Galois bővítés és  $\mu_n \subset K$ . Ha  $\text{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}_n = G$ . Ekkor  $\exists \alpha \in L$ , hogy  $L = K(\alpha)$  és  $\alpha^n = a \in K$ .

**Bizonyítás:**

Nézzük a következő rövid egzakt sorozatot:

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow L^\times \xrightarrow{()^n} (L^\times)^n \rightarrow 1.$$

Ha erre a rövid egzakt sorozatra alkalmazzuk a  $G$  csoportkohomológiát, akkor a következő hosszú egzakt sorozatot kapjuk:

$$0 \rightarrow H^0(G, \mu_n) \rightarrow H^0(G, L^\times) \rightarrow H^0(G, (L^\times)^n) \rightarrow H^1(G, \mu_n) \rightarrow H^1(G, L^\times) \rightarrow \dots$$

ebből a nulladik homológiák egyenlőek azzal, hogy ráeresztjük a  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$  funktort. Ezke rendre egyenlőek  $\mu_n$ ,  $K^\times$ ,  $(L^\times)^n \cap K^\times$ . Mivel  $\mu_n$ -en  $G$  triviálisan hat, ezért minden kereszt homomorfizmus homomorfizmus is egyben és nincsen principális kereszt homomorfizmus, így  $H^1(G, \mu_n) = \text{Hom}(G, \mu_n) \simeq G$ , illetve az utolsó tag Hilbert 90-es tétele miatt a triviális csoport. Mivel egzakt, így  $(L^\times)^n \cap K$  nem lehet nulla, hiszen a képe az elemeinek megegyezik  $G$ -ből menő homomorfizmus magjával, ami  $|G|$  elemű. Tehát  $\exists \alpha \in L^\times$ , hogy  $\alpha^n = a$  és  $L = K(\alpha)$ .

## 3. fejezet

# $K$ -elmélet [5]

**3.0.1. Definíció.** Legyen  $M$  egy halmaz, amin létezik egy asszociatív és kommutatív művelet  $+$  és egy additív egység eleme  $0$ . Ekkor  $M$ -t a műveletével egy Abel monoidnak nevezzük.

**3.0.2. Definíció.** Egy Abel monoid csoporttá való bővítése alatt a következő műveletet nevezzük. Legyen  $M$  egy Abel monoid ekkor  $M^{-1}M$  egy Abel csoport egy monoid leképzéssel  $[\ ] : M \rightarrow M^{-1}M$ , ami univerzális is arra nézve, hogy minden  $A$  Abel csoportra és  $M \rightarrow A$  monoid leképzésre létezik egy  $M^{-1}M \rightarrow A$  csoport-homomorfizmus.

**3.0.3. Definíció.** Legyen  $R$  egy gyűrű.  $\mathbf{P}(R)$  a végesen generált projektív  $R$ -modulusok izomorfia osztályainak a halmaza együtt a direktösszeggel és a nulla modulussal, egy Abel monoidot alkot. Az  $R$  gyűrű Grothendieck csoportja,  $K_0(R)$ , a  $\mathbf{P}(R)$  Abel monoid csoporttá való bővítése.

**3.0.4. Megjegyzés.** Ha  $R$  kommutatív akkor  $K_0(R)$  kommutatív gyűrűt alkot, ahol a multiplikatív egység elem  $1 = [R]$

**3.0.5. Megjegyzés.** Nézzünk példákat:

- $R = k$  test ekkor  $\mathbf{P}(R) = \mathbb{N}$  és  $K_0(R) = \mathbb{Z}$ .
- Ha  $R$  lokális akkor is  $K_0(R) = \mathbb{Z}$
- $K_0$ -t definiálhatjuk egzakt kategóriákra is. ( $0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$  akkor  $[A] = [B] + [C]$ ) Nézzük a véges Abel csoportok kategóriáját  $FGRP$ . Ez nem egzakt, de faktorizáljuk le az összes rövid egzakt sorozattal. Ekkor  $K_0(FGRP) = \mathbb{Q}^\times$ , mert egy csoport osztálya a rendje lesz.
- Most bővítsük ki az előző kategóriát az összes végesen generált Abel csoportra. Ekkor a csoportok szabad részének a rangja lesz az osztály értéke.

**3.0.6. Definíció.** Legyen  $R$  egy gyűrű. és  $GL_n(R)$  az  $n \times n$   $R$  Vátozos mátrixok gyűrűje. Ha minden  $A$  mátrixot megfeleltetjük  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixal akkor beágyazhatjuk  $GL_n(R)$ -t  $GL_{n+1}(R)$ -be. Ekkor az uniója a következő sorozatnak

$$GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset \dots \subset GL_n(R) \subset GL_{n+1}(R) \subset \dots$$

a végtelen lineáris csoportnak nevezzük és jele  $GL(R)$ .

**3.0.7. Definíció.**  $K_1(R)$  a következő Abel csoport  $GL(R)/[GL(R), GL(R)]$ .

**3.0.8. Megjegyzés.** Sajnálatosan  $K_1$ -t sokkal kevésbé értjük és tudjuk számolni, mint  $K_0$ -t, viszont vannak gyűrűk, amikre ki tudjuk számolni. Példák:

- Ha  $R$  kommutatív akkor léteik egy  $GL(R) \rightarrow R^\times$  leképzés, ami a determináns. Ez indukál egy  $\det: K_1(R) \rightarrow R^\times$  homomorfizmust és a leképzés magját  $SK_1(R)$ -el szokás jelölni. Ekkor  $K_1(R) = R^\times \oplus SK_1(R)$ .
- Ha  $F$  egy test akkor  $K_1(F) = F^\times$ .
- Ha  $R = R_1 \times R_2$  akkor  $K_1(R) = K_1(R_1) \oplus K_1(R_2)$ .
- Ha  $R' = M_n(R)$  akkor  $K_1(R') \simeq K_1(R)$

## 4. fejezet

# Euler karakterisztika és Akashi sorok[1]

### 4.1. Felvezetés

Legyen  $G$  egy olyan kompakt  $p$ -adikus Lie csoport, aminek nincs  $p$  rendű eleme, ekkor  $\Lambda(G)$  lesz  $G$  Iwasawa algebrája. Feltesszük, hogy létezik egy zárt normálosztó  $H \leq G$ , hogy  $\Gamma = G/H \simeq \mathbb{Z}_p$ . Ezt azért tehetjük meg, mert például, ha  $L/K$  egy  $p$ -adikus Lie bővítés, akkor a Galois csoport tartalmaz ilyen normálosztót. A fejezet során minden alkalommal, amikor modulusokról beszélünk, kifejezetten bal modulusra gondolunk.

### 4.2. Ore halmaz

**4.2.1. Jelölés.**  $\Omega(G) = \varprojlim_U \mathbb{F}_p[G/U]$ , ahol  $U$  nyílt normálosztója  $G$ -nek. Továbbá a  $\mathcal{Q}(G)$ -vel fogjuk jelölni  $\Lambda(G)$  hányados testét.

**4.2.2. Definíció.** Legyen  $S$  egy multiplikatív halmaz  $\Lambda(G)$ -ben.  $S$  bal és jobb Ore halmaz, ha minden  $s \in S$  és  $r \in \Lambda(G)$ -re létezik  $t_1, t_2 \in S$  és  $w_1, w_2 \in \Lambda(G)$ , hogy

$$sw_1 = rt_1, \quad w_2s = t_2r.$$

**4.2.3. Definíció.** Legyen  $S$  azon  $f \in \Lambda(G)$  elemek, amelyre  $\Lambda(G)/f\Lambda(G)$  végesen generált  $\Lambda(H)$  modulusok.

Ekkor  $S$  lesz  $\Lambda(G)$  kanonikus Ore halmaza. Ha  $O$  az egészek gyűrűje valamilyen véges bővítésének  $\mathbb{Q}_p$ -nek, akkor  $\Lambda_O(\Gamma)$  lesz az  $O$ -Iwasawa algebrája  $\Gamma$ -nak és  $\mathcal{Q}_O(\Gamma)$  a hányados teste.

**4.2.4. Definíció.** Legyen

$$S^* = \bigcup_{n \geq 0} p^n S,$$

ahol  $S$   $\Lambda(G)$  Ore halmaza. Mivel  $p \in Z(\Lambda(G))$ , ezért  $S^*$  is egy bal és jobb Ore halmaz, és egyik eleme sem nullosztó.

**4.2.5. Definíció.** Legyen  $S, S^*$  Ore halmazok ekkor  $\Lambda(G)$  lokalizálását  $\Lambda(G)_S, \Lambda(G)_{S^*}$ -val jelöljük és

$$\Lambda(G)_{S^*} = \Lambda(G)_S \left[ \frac{1}{p} \right]$$

**4.2.6. Jelölés.** Legyen  $M$  egy  $\Lambda(G)$  modulus. A végesen rendű elemei által generált modulust  $M(p)$ -vel jelöljük és ez egy  $p$ -primer modulus.  $(\text{Ann}_{\Lambda(G)}(M))$   $p$ -prímer

**4.2.7. Állítás.** Legyen  $M$  egy végesen generált  $\Lambda(G)$  bal vagy jobb modulus. Ekkor  $M$  végesen generált  $\Lambda(H)$  fölött akkor és csak akkor, ha  $M$   $S$ -torzió.

**4.2.8. Megjegyzés.** Legyen  $M$  végesen generált  $\Lambda(G)$  modulus.  $M$  akkor és csak akkor lesz  $S^*$ -torzió, ha  $M/M(p)$  végesen generált  $\Lambda(H)$  modulus.

**4.2.9. Jelölés.** Ezeknek a modulusoknak a kategóriáját  $\mathfrak{M}_H(G)$ -vel jelöljük.

**4.2.10. Lemma.** Minden  $M \in \mathfrak{M}_H(G)$ -re  $H_i(H, M)$  minden  $i \geq 0$ -ra végesen generált torzió  $\Lambda(\Gamma)$  modulus és ha  $G$ -nek nincs  $p$  rendű eleme, akkor  $H_i(H, M)$  minden  $i \geq d$ -re, ahol  $d$   $G$ -nek a dimenziója, mint  $p$ -adikus Lie csoport.

Vegyünk  $O$ -t, mint valamilyen  $L/\mathbb{Q}_p$  véges bővítés egészeinek gyűrűje és vegyünk egy folytonos homomorfizmust:

$$\varphi : G \rightarrow GL_n(O),$$

ahol  $n \geq 1$ . Ekkor nézhetjük  $M_O = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} O$  modulust.

**4.2.11. Definíció.** Egy  $M \in \mathfrak{M}_H(G)$  modulus csavarását a következőképpen definiáljuk

$$tw_\varphi(M) = M_O \otimes_O O^n.$$

Ezen a moduluson  $G$ -nek a hatása  $g(m \otimes z) = gm \otimes gz$  és  $O^n$ -n  $g \in G$  úgy, hat, mint  $\varphi(g)$ .

**4.2.12. Lemma.** Ha  $M \in \mathfrak{M}_H(G)$  akkor minden folytonos reprezentáció  $\varphi$ -re,  $tw_\varphi(M) \in \mathfrak{M}_H(G)$ .

Minden folytonos reprezentációra  $\varphi$  indukál egy gyűrűhomomorfizmust is  $\varphi : \Lambda(G) \rightarrow M_n(O)$ . A nemkommutatív Iwasa-elméletben fontos szerepet játszik a következő gyűrűhomomorfizmus

$$\Phi_\varphi : \Lambda(G) \rightarrow M_n(\Lambda_O(\Gamma)).$$

Tudjuk, hogy  $M_n(\Lambda_O(\Gamma)) = M_n(O) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(\Gamma)$ , mivel  $O$  egy szabad  $\mathbb{Z}_p$  modulus, ezért elég  $O$ -t kiegészíteni az egész  $\Lambda(\Gamma)$ -re. A homomorfizmust a következő homomorfizmus indukálja  $G \rightarrow (M_n(O) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(\Gamma))^\times$ , ahol  $g \mapsto \varphi(g) \otimes \bar{g}$ , ahol  $\bar{g}$ ,  $g$  képe  $\Gamma$ -ban.

**4.2.13. Lemma.** A  $\Phi_\varphi$  homomorfizmus kiterjeszthető  $\Lambda(G)_{S^*}$  egy homomorfizmusává és ezt is  $\Phi_\varphi$ -vel jelöljük

$$\Lambda(G)_{S^*} \rightarrow M_n(\mathcal{Q}_O(\Gamma)).$$

### 4.3. Karakterisztikus elemei az $\mathfrak{M}_H(G)$ modulusoknak

A  $\varphi$  homomorfizmus indukál egy  $K_1$  csoportok közötti homomorfizmust  $K_1(\Lambda(G)) \rightarrow K_1(M_n(O)) \simeq K_1(O) = O^\times$ . Ez kiterjeszthető a lokalizált gyűrű  $K_1$  csoportjára  $\Phi'_\varphi : K_1(\Lambda(G)_{S^*}) \rightarrow K_1(M_n(\mathcal{Q}_O(\Gamma))) = \mathcal{Q}_O(\Gamma)^\times$ . Mivel  $\Lambda_O(\Gamma) \simeq O[[T]]$ , ezért az  $Aug : \Lambda_O(\Gamma) \rightarrow O$ , augmentációs leképezés hozzárendel egy  $\gamma \in \Lambda_O(\Gamma)$  elemhez a konstans tagját  $O$ -ban. Vegyünk a leképezés magját  $\text{Ker}(Aug) = \mathfrak{p}$ . Ennek elemei nem nullosztók, ezért lokalizálhatunk vele és tudjuk, hogy  $\Lambda_O(\Gamma)_\mathfrak{p} \subset \mathcal{Q}_O(\Gamma)$ . Ennek az új gyűrűnek az augmentációját is nézhetjük és  $Aug : \Lambda_O(\Gamma)_\mathfrak{p} \rightarrow L$ , ahol  $L$  a hányados teste  $O$ -nak. Ekkor  $\xi \in K_1(\Lambda(G)_{S^*})$  elemére definiálhatunk egy homomorfizmust  $L \cup \{\infty\}$ -be. Legyen  $\xi$  képe  $\xi(\varphi) = Aug(\Phi'_\varphi(\xi))$ , ha  $\Phi'_\varphi(\xi) \in \mathcal{Q}_O(\Gamma)$ , különben végtelen. Következőkben definiálni szeretnénk  $\mathfrak{M}_H(G)$  elemeinek a karakterisztikus elemeit. Ehhez elsőnek is meg kell értenünk a hosszú egzekt sorozatát az Iwasawa algebrák  $K_i$  ( $i = 1, 2$ ) csoportjainak.

$$\cdots \rightarrow K_1(\Lambda(G)) \rightarrow K_1(\Lambda(G)_{S^*}) \xrightarrow{\partial_G} K_0(\mathfrak{M}_H(G)) \rightarrow K_0(\Lambda(G)) \rightarrow K_0(\Lambda(G)_{S^*}) \rightarrow 0$$

**4.3.1. Állítás.** Ha  $G$ -nek nincs  $p$ -ad rendű eleme akkor  $\partial_G$  szűrjektív.

Ezzel az állítással képesek vagyunk definiálni a karakterisztikus elemet.

**4.3.2. Definíció.** Legyen  $M \in \mathfrak{M}_H(G)$ .  $M$  karakterisztikus elemének hívjuk azt az  $\xi_M \in K_1(\Lambda(G)_{S^*})$  elemet, ami teljesíti a következőt

$$\partial_G(\xi_M) = [M].$$

**4.3.3. Definíció.** Legyen  $M$   $\Lambda(G)$ -modulus. Ekkor  $M$   $G$ -Euler karakterisztikája véges, ha minden  $H_i(G, M)$  véges minden  $i \geq 0$  és

$$\chi(G, M) = \prod_{i \geq 0} \#(H_i(G, M))^{(-1)^i}.$$

**4.3.4. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a jobb oldalon csak véges sok elem nem 1, mivel feltettük, hogy  $G$ -nek nincs  $p$ -ad rendű eleme.

**4.3.5. Definíció.** Legyen  $M \in \mathfrak{M}_H(G)$ . Legyen  $f_{i,M}$  az  $H_i(H, M)$  karakterisztikus hatványsorai, mint  $\Lambda(\Gamma)$  modulus. Ekkor a következő kifejezést,  $M$  Akashi sorának hívjuk

$$\text{Ak}(M) = \prod_{i \geq 0} f_{i,M}^{(-1)^i} \text{ mod } \Lambda(\Gamma)^\times.$$

Ha  $M$  egy  $O$ -modulus is akkor  $H_i(H, M)$ -et tekinthetjük, mint végeseng generált  $\Lambda_O(\Gamma)$ -modulus. Legyen  $g_{i,M}$   $H_i(H, M)$  karakterisztikus hatványsora, mint  $\Lambda_O(\Gamma)$ -modulus. Ekkor

$$\text{Ak}_O(M) = \prod_{i \geq 0} g_{i,M}^{(-1)^i} \text{ mod } \Lambda_O(\Gamma)^\times.$$

**4.3.6. Tétel.** Tegyük fel, hogy  $G$ -nek nincs  $p$ -ad rendű eleme. Legyen  $M \in \mathfrak{M}_H(G)$  és  $\xi_M$  a karakterisztikus eleme  $M$ -nek. Minden folytonos reprezentációra  $\varphi : G \rightarrow GL_n(O)$ , aminek a  $G$ -Euler karakterisztikája véges tudjuk, hogy

$$\xi_M(\varphi) \neq 0, \infty,$$

és

$$\chi(G, tw_{\hat{\varphi}}(M)) = |\xi_M(\varphi)|_{\mathfrak{p}}^{-m_{\mathfrak{p}}},$$

ahol  $m_{\mathfrak{p}} = |L : \mathcal{Q}_p|$  és  $\hat{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})^T$

*Bizonyítás.* (csak vázlatosan)

Két homomorfizmusra van szükségünk

$$\Delta_{\varphi} : K_0(\mathfrak{M}_H(G)) \rightarrow \mathcal{Q}_O(\Gamma)^\times / \Lambda_O(\Gamma)^\times,$$

azzal a hozzárendeléssel, hogy

$$\Delta_{\varphi}([M]) = \text{Ak}_O(tw_{\hat{\varphi}}(M))$$

és

$$\partial_{\Gamma} : \mathcal{Q}_O(\Gamma)^\times \rightarrow \mathcal{Q}_O(\Gamma)^\times / \Lambda_O(\Gamma)^\times.$$

Nézzük a következő diagrammot, és be szeretnénk látni, hogy kommutatív

$$\begin{array}{ccc} K_1(\Lambda(G)_{S^*}) & \xrightarrow{\partial_G} & K_0(\mathfrak{M}_H(G)) \\ \left| \Phi'_{\varphi} \right. & & \left| \partial_{\Gamma} \right. \\ \mathcal{Q}_O(\Gamma)^\times & \xrightarrow{\Delta_{\varphi}} & \mathcal{Q}_O(\Gamma)^\times / \Lambda_O(\Gamma)^\times \end{array}$$

A bizonyítás további részében a norma és augmentációs leképezések kommutativitását felhasználva következik az állítás, mert  $H_i(H, M)$  karakterisztikus hatványsorának képe  $L$ -ben nem nulla sem nem végtelen.  $\square$

## 4.4. Előretekintés

**4.4.1. Jelölés.** Legyen  $F$  egy véges bővítése  $\mathbb{Q}$ -nak és  $F^{\text{cyc}}$  a körosztási  $\mathbb{Z}_p$ -bővítése  $F$ -nek és  $\Gamma_F = \text{Gal}(F^{\text{cyc}}/F)$ . Legyen  $E$  egy  $\mathbb{Q}$  fölötti eliptikus görbe és  $E_{p^\infty}$  a  $p$ -hatványrendű pontok csoportja  $E$ -en.

Ekkor tudunk nézni egy bővítését  $\mathbb{Q}$ -nak  $F_\infty = \mathbb{Q}(E_{p^\infty})$ . Tudjuk, hogy  $F_\infty \supseteq \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ , tehát  $F_\infty \supseteq \mathbb{Q}^{\text{cyc}}$  és

$$G = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}), \quad H = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}^{\text{cyc}}), \quad \Gamma = \text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{cyc}}/\mathbb{Q}).$$

Tehát  $G$  egy kompakt  $p$ -adikus Lie csoport, sőt tudni, hogy  $G \simeq M$ , ahol  $M$  egy kompakt részcsoportha  $GL_2(\mathbb{Z}_p) = \text{Aut}(E_{p^\infty})$ .

**4.4.2. Definíció.** Legyen  $L$  egy algebrai bővítése  $\mathbb{Q}$ -nak.  $E$  selmer csoportja  $L$  fölött

$$\mathcal{S}(E/L) = \text{Ker}(H^1(L, E_{p^\infty}) \rightarrow \prod_{\omega} H^1(L_{\omega}, E(\bar{L}_{\omega}))),$$

ahol  $\omega$  végig megy az összes nemarkhimédeszi hely fölött.

**4.4.3. Definíció.** A következő kifejezés a selmer csoport Pontrjagin duálisa

$$X(E/L) = \text{Hom}(\mathcal{S}(E/L), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

**4.4.4. Állítás.** Legyen  $p \geq 5$  prím és  $E$ -nek van jó  $p$  redukciója. Ekkor  $X(E/L) \in \mathfrak{M}_H(G)$ .

# Irodalomjegyzék

- [1] Kazuya Kato Ramdorai Sujatha Otmar Venjakob John Cotes, Takako Fukaya. The gl2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication, 2004. Elérhető:<https://www.numdam.org/item/10.1007/s10240-004-0029-3.pdf>.
- [2] Fehér László. Homológia, 2024.
- [3] J.S. Milne. Class field theory (v4.03), 2020. Available at [www.jmilne.org/math/](http://www.jmilne.org/math/).
- [4] Csahók Tímea. Csoportkohomológia, 2020.
- [5] Charles Weibel. The k-book: an introduction to algebraic k-theory, 2013.