

Nemkommutatív Iwasawa-elmélet: Akashi sorok és Euler karakterisztika

Pálffy Patrik
Témavezető: Zábrádi Gergely

2025 június

Definíció

Legyen $C = (C_n, \partial_n)$ lánckomplexus, ahol minden $n \in \mathbb{Z}$ -re C_n -ben félegzakt ($\partial_{n-1}\partial_n = 0$) és $C_n \in R\text{-mod}$. Ekkor a $H_n(C) = \text{Ker}(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1})$ csoportot a C lánckomplexus n -edik homológia-csoportjának nevezzük.

$$\cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots$$

Definíció

Legyen $C = (C_n, \partial_n)$ lánckomplexus, ahol minden $n \in \mathbb{Z}$ -re C_n -ben félegzakt ($\partial_{n-1}\partial_n = 0$) és $C_n \in R\text{-mod}$. Ekkor a $H_n(C) = \text{Ker}(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1})$ csoportot a C lánckomplexus n -edik homológia-csoportjának nevezzük.

$$\cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots$$

Történet

Homológiát a topológia eszközeként hozták létre, ami egy sokaság " n dimenziós lyukait" számolja, viszont számunkra a derivált funktorok definiálására szükséges.

Definíció (Projektív feloldás)

Legyen M R –modulus. M projektív feloldásának nevezzük egy $\mathcal{P} = \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ egzakt sorozatot, ahol P_i projektív R –modulus minden $i \geq 0$ esetén.

Definíció

Legyen $\mathcal{P}$ az M modulus projektív feloldása és N egy R –modulus, ekkor

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{P}, N) := 0 \rightarrow \mathrm{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{\partial_0} \mathrm{Hom}(P_1, N) \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{Hom}(P_2, N) \rightarrow \dots$$

Példa

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Példa

Nézzük $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, mint egy $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ modulus, feltéve, hogy $n|m$. Ekkor a projektív feloldás

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Definíció

Két R -modulus esetén M, N -re definiálhatjuk az Ext-jüket $\text{Ext}_R^n(M, N) := H^n(\text{Hom}(\mathcal{P}, N))$.

Definíció

Két R -modulus esetén M, N -re definiálhatjuk az Ext-jüket $\text{Ext}_R^n(M, N) := H^n(\text{Hom}(\mathcal{P}, N))$.

Tétel

Legyen $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ R -modulusok rövid egzakt sorozata és M R -modulus. Ekkor léteznek hosszú egzakt sorozatok:

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^0(M, A) \rightarrow \text{Ext}_R^0(M, B) \rightarrow \text{Ext}_R^0(M, C) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, A) \rightarrow \dots$$

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^0(C, M) \rightarrow \text{Ext}_R^0(B, M) \rightarrow \text{Ext}_R^0(A, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(C, M) \rightarrow \dots$$

Definíció

Legyen M bal R -modulus, N jobb R -modulus és $\mathcal{P} \rightarrow N$ projektív feloldás, ekkor

$$\mathcal{P} \otimes_R M := \cdots \rightarrow P_2 \otimes_R M \xrightarrow{\partial_1} P_1 \otimes_R M \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Definíció

Legyen M bal R -modulus, N jobb R -modulus és $\mathcal{P} \rightarrow N$ projektív feloldás, ekkor

$$\mathcal{P} \otimes_R M := \cdots \rightarrow P_2 \otimes_R M \xrightarrow{\partial_1} P_1 \otimes_R M \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Definíció

Legyen M bal, N jobb R -modulus, akkor $\mathrm{Tor}_n^R(N, M) := H_n(\mathcal{P} \otimes_R M)$.

Definíció

Legyen G egy csoport és M bal $\mathbb{Z}G$ -modulus. Ekkor M -nek az n -edik kohomológiacsoportja $H^n(G, M) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, M)$.

Definíció

Legyen G egy csoport és M bal $\mathbb{Z}G$ -modulus. Ekkor M -nek az n -edik kohomológiacsoportha $H^n(G, M) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, M)$.

Definíció

Legyen G egy csoport és M bal $\mathbb{Z}G$ -modulus. Ekkor M -nek az n -edik homológiacsoportha $H_n(G, M) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(M, \mathbb{Z})$.

Állítás

Legyen L/K egy Galois bővítés és $\mu_n \subset K$. Ha $\text{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}_n = G$, ekkor $\exists \alpha \in L$, hogy $L = K(\alpha)$ és $\alpha^n = a \in K$.

Állítás

Legyen L/K egy Galois bővítés és $\mu_n \subset K$. Ha $\text{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}_n = G$, ekkor $\exists \alpha \in L$, hogy $L = K(\alpha)$ és $\alpha^n = a \in K$.

Nézzük a következő rövid egzakt sorozatot:

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow L^\times \xrightarrow{()^n} (L^\times)^n \rightarrow 1.$$

Állítás

Legyen L/K egy Galois bővítés és $\mu_n \subset K$. Ha $\text{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}_n = G$, ekkor $\exists \alpha \in L$, hogy $L = K(\alpha)$ és $\alpha^n = a \in K$.

Nézzük a következő rövid egzakt sorozatot:

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow L^\times \xrightarrow{()^n} (L^\times)^n \rightarrow 1.$$

Ha erre a rövid egzakt sorozatra alkalmazzuk a G csoportkohomológiát, akkor a következő hosszú egzakt sorozatot kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(G, \mu_n) \rightarrow H^0(G, L^\times) \rightarrow H^0(G, (L^\times)^n) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(G, \mu_n) \rightarrow H^1(G, L^\times) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Definíció

Legyen M egy halmaz, amin létezik egy asszociatív és kommutatív művelet $+$ és egy additív egység eleme 0 . Ekkor M -t a műveletével egy Abel monoidnak nevezzük.

Definíció

Legyen M egy halmaz, amin létezik egy asszociatív és kommutatív művelet $+$ és egy additív egység eleme 0 . Ekkor M -t a műveletével egy Abel monoidnak nevezzük.

Definíció

Egy Abel monoid csoporttá való bővítése alatt a következő műveletet nevezzük. Legyen M egy Abel monoid ekkor $M^{-1}M$ egy Abel csoport egy monoid leképzéssel $[\] : M \rightarrow M^{-1}M$, ami univerzális is arra nézve, hogy minden A Abel csoportra és $M \rightarrow A$ monoid leképzésre létezik egy $M^{-1}M \rightarrow A$ csoporthomomorfizmus.

Definíció

Legyen M egy halmaz, amin létezik egy asszociatív és kommutatív művelet $+$ és egy additív egység eleme 0 . Ekkor M -t a műveletével egy Abel monoidnak nevezzük.

Definíció

Egy Abel monoid csoporttá való bővítése alatt a következő műveletet nevezzük. Legyen M egy Abel monoid ekkor $M^{-1}M$ egy Abel csoport egy monoid leképzéssel $[\] : M \rightarrow M^{-1}M$, ami univerzális is arra nézve, hogy minden A Abel csoportra és $M \rightarrow A$ monoid leképzésre létezik egy $M^{-1}M \rightarrow A$ csoporthomomorfizmus.

Definíció

Legyen R egy gyűrű. $\mathbf{P}(R)$ a végiesen generált projektív R -modulusok izomorfia osztályainak a halmaza együtt a direktösszeggel és a nulla modulussal, egy Abel monoidot alkot. Az R gyűrű Grothendieck csoportja, $K_0(R)$, a $\mathbf{P}(R)$ Abel monoid csoporttá való bővítése.

Definíció

Legyen R egy gyűrű. $\mathbf{P}(R)$ a végiesen generált projektív R -modulusok izomorfia osztályainak a halmaza együtt a direktösszeggel és a nulla modulussal, egy Abel monoidot alkot. Az R gyűrű Grothendieck csoportja, $K_0(R)$, a $\mathbf{P}(R)$ Abel monoid csoporttá való bővítése.

Példák

- $R = k$ test ekkor $\mathbf{P}(R) = \mathbb{N}$ és $K_0(R) = \mathbb{Z}$.

Definíció

Legyen R egy gyűrű. $\mathbf{P}(R)$ a végesen generált projektív R -modulusok izomorfia osztályainak a halmaza együtt a direktösszeggel és a nulla modulussal, egy Abel monoidot alkot. Az R gyűrű Grothendieck csoportja, $K_0(R)$, a $\mathbf{P}(R)$ Abel monoid csoporttá való bővítése.

Példák

- $R = k$ test ekkor $\mathbf{P}(R) = \mathbb{N}$ és $K_0(R) = \mathbb{Z}$.
- Ha R lokális akkor is $K_0(R) = \mathbb{Z}$

Definíció

Legyen R egy gyűrű. és $GL_n(R)$ az $n \times n$ R Vátozos mátrixok gyűrűje. Ha minden A matrixot megfeleltetjük $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixal akkor beágyazhatjuk $GL_n(R)$ -t $GL_{n+1}(R)$ -be. Ekkor az uniója a következő sorozatnak

$$GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset \dots \subset GL_n(R) \subset GL_{n+1}(R) \subset \dots$$

a végtelen lineáris csoportnak nevezzük és jele $GL(R)$.

Definíció

Legyen R egy gyűrű. és $GL_n(R)$ az $n \times n$ R Vátozos mátrixok gyűrűje. Ha minden A matrixot megfeleltetjük $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixal akkor beágyazhatjuk $GL_n(R)$ -t $GL_{n+1}(R)$ -be. Ekkor az uniója a következő sorozatnak

$$GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset \cdots \subset GL_n(R) \subset GL_{n+1}(R) \subset \cdots$$

a végtelen lineáris csoportnak nevezzük és jele $GL(R)$.

Definíció

$K_1(R)$ a következő Abel csoport $GL(R)/[GL(R), GL(R)]$.

Definíció

Legyen R egy gyűrű. és $GL_n(R)$ az $n \times n$ R Vátozos mátrixok gyűrűje. Ha minden A matrixot megfeleltetjük $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixal akkor beágyazhatjuk $GL_n(R)$ -t $GL_{n+1}(R)$ -be. Ekkor az uniója a következő sorozatnak

$$GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset \cdots \subset GL_n(R) \subset GL_{n+1}(R) \subset \cdots$$

a végtelen lineáris csoportnak nevezzük és jele $GL(R)$.

Definíció

$K_1(R)$ a következő Abel csoport $GL(R)/[GL(R), GL(R)]$.

Példák

- Ha F egy test akkor $K_1(F) = F^\times$.

Definíció

Legyen R egy gyűrű. és $GL_n(R)$ az $n \times n$ R Vátozos mátrixok gyűrűje. Ha minden A matrixot megfeleltetjük $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixal akkor beágyazhatjuk $GL_n(R)$ -t $GL_{n+1}(R)$ -be. Ekkor az uniója a következő sorozatnak

$$GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset \cdots \subset GL_n(R) \subset GL_{n+1}(R) \subset \cdots$$

a végtelen lineáris csoportnak nevezzük és jele $GL(R)$.

Definíció

$K_1(R)$ a következő Abel csoport $GL(R)/[GL(R), GL(R)]$.

Példák

- Ha F egy test akkor $K_1(F) = F^\times$.
- Ha $R = R_1 \times R_2$ akkor $K_1(R) = K_1(R_1) \oplus K_1(R_2)$.

Definíció

Legyen R egy gyűrű. és $GL_n(R)$ az $n \times n$ R Vátozos mátrixok gyűrűje. Ha minden A matrixot megfeleltetjük $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixal akkor beágyazhatjuk $GL_n(R)$ -t $GL_{n+1}(R)$ -be. Ekkor az uniója a következő sorozatnak

$$GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset \cdots \subset GL_n(R) \subset GL_{n+1}(R) \subset \cdots$$

a végtelen lineáris csoportnak nevezzük és jele $GL(R)$.

Definíció

$K_1(R)$ a következő Abel csoport $GL(R)/[GL(R), GL(R)]$.

Példák

- Ha F egy test akkor $K_1(F) = F^\times$.
- Ha $R = R_1 \times R_2$ akkor $K_1(R) = K_1(R_1) \oplus K_1(R_2)$.
- Ha $R' = M_n(R)$ akkor $K_1(R') \simeq K_1(R)$

Emlékeztető

- Legyen G egy olyan kompakt p -adikus Lie csoport, aminek nincs p rendű eleme, ekkor $\Lambda(G)$ lesz G Iwasawa algebrája.

Emlékeztető

- Legyen G egy olyan kompakt p -adikus Lie csoport, aminek nincs p rendű eleme, ekkor $\Lambda(G)$ lesz G Iwasawa algebrája.
- Feltesszük, hogy létezik egy zárt normálosztó $H \leq G$, hogy $\Gamma = G/H \simeq \mathbb{Z}_p$.

Emlékeztető

- Legyen G egy olyan kompakt p -adikus Lie csoport, aminek nincs p rendű eleme, ekkor $\Lambda(G)$ lesz G Iwasawa algebrája.
- Feltesszük, hogy létezik egy zárt normálosztó $H \leq G$, hogy $\Gamma = G/H \simeq \mathbb{Z}_p$. (Ezt azért tehetjük meg, mert például, ha L/K egy p -adikus Lie bővítés, akkor a Galois csoport tartalmaz ilyen normálosztót.)

Emlékeztető

- Legyen G egy olyan kompakt p -adikus Lie csoport, aminek nincs p rendű eleme, ekkor $\Lambda(G)$ lesz G Iwasawa algebrája.
- Feltesszük, hogy létezik egy zárt normálosztó $H \leq G$, hogy $\Gamma = G/H \simeq \mathbb{Z}_p$. (Ezt azért tehetjük meg, mert például, ha L/K egy p -adikus Lie bővítés, akkor a Galois csoport tartalmaz ilyen normálosztót.)

Megjegyzés

A fejezet során minden alkalommal, amikor modulusokról beszélünk, kifejezetten bal modulusra gondolunk.

Definíció

Legyen S egy multiplikatív halmaz $\Lambda(G)$ -ben. S bal és jobb Ore halmaz, ha minden $s \in S$ és $r \in \Lambda(G)$ -re létezik $t_1, t_2 \in S$ és $w_1, w_2 \in \Lambda(G)$. hogy

$$sw_1 = rt_1, \quad w_2s = t_2r.$$

Definíció

Legyen S azon $f \in \Lambda(G)$ elemek, amelyre $\Lambda(G)/f\Lambda(G)$ végesen generált $\Lambda(H)$ modulusok és legyen

$$S^* = \bigcup_{n \geq 0} p^n S,$$

ahol S $\Lambda(G)$ Ore halmaza. Mivel $p \in Z(\Lambda(G))$, ezért S^* is egy bal és jobb Ore halmaz, és egyik eleme sem nullosztó.

$\Lambda(G)$ modulusok

Jelölés

Legyen M egy $\Lambda(G)$ modulus. A végesen rendű elemei által generált modulust $M(p)$ -vel jelöljük és ez egy p -primer modulus. $(Ann_{\Lambda(G)}(M), p\text{-prímer})$

$\Lambda(G)$ modulusok

Jelölés

Legyen M egy $\Lambda(G)$ modulus. A végesen rendű elemei által generált modulust $M(p)$ -vel jelöljük és ez egy p -primer modulus. ($\text{Ann}_{\Lambda(G)}(M)$ p -prímer)

Állítás

Legyen M végesen generált $\Lambda(G)$ modulus. M akkor és csak akkor lesz S^* -torzió, ha $M/M(p)$ végesen generált $\Lambda(H)$ modulus.

$\Lambda(G)$ modulusok

Jelölés

Legyen M egy $\Lambda(G)$ modulus. A végesen rendű elemei által generált modulust $M(p)$ -vel jelöljük és ez egy p -primer modulus. ($\text{Ann}_{\Lambda(G)}(M)$ p -prímer)

Állítás

Legyen M végesen generált $\Lambda(G)$ modulus. M akkor és csak akkor lesz S^* -torzió, ha $M/M(p)$ végesen generált $\Lambda(H)$ modulus.

Jelölés

Ezeknek a modulusoknak a kategóriáját $\mathfrak{M}_H(G)$ -vel jelöljük.

Karakterisztikus elemei $\mathfrak{M}_H(G)$ modulusoknak

Motiváció

Megszeretnénk érteni a $K_1(\Lambda(G)_{S^*})$ csoportot. Erre szeretnénk eszközöket és tudunk is, ha feltesszük, hogy

$K_1(\Lambda(G)_{S^*}) \xrightarrow{\partial_G} K_0(\mathfrak{M}_H(G))$ leképezés szürjektív. Ekkor tudjuk definiálni a karakterisztikus elemeit $\mathfrak{M}_H(G)$ -nek.

Karakterisztikus elemei $\mathfrak{M}_H(G)$ modulusoknak

Motiváció

Megszeretnénk érteni a $K_1(\Lambda(G)_{S^*})$ csoportot. Erre szeretnénk eszközöket és tudunk is, ha feltesszük, hogy

$K_1(\Lambda(G)_{S^*}) \xrightarrow{\partial_G} K_0(\mathfrak{M}_H(G))$ leképezés szürjektív. Ekkor tudjuk definiálni a karakterisztikus elemeit $\mathfrak{M}_H(G)$ -nek.

Definíció

Legyen $M \in \mathfrak{M}_H(G)$. M karakterisztikus elemének hívjuk azt az $\xi_M \in K_1(\Lambda(G)_{S^*})$ elemet, ami teljesíti a következőt

$$\partial_G(\xi_M) = [M].$$

Definíció

Egy $M \in \mathfrak{M}_H(G)$ modulus csavarását a következőképpen definiáljuk

$$tw_\varphi(M) = M_O \otimes_O O^n.$$

Ezen a moduluson G -nek a hatása $g(m \otimes z) = gm \otimes gz$ és O^n -n $g \in G$ úgy, hat, mint $\varphi(g)$.

Euler karaktereiszitka és modulusok csavarása

Definíció

Egy $M \in \mathfrak{M}_H(G)$ modulus csavarását a következőképpen definiáljuk

$$tw_{\varphi}(M) = M_O \otimes_O O^n.$$

Ezen a moduluson G -nek a hatása $g(m \otimes z) = gm \otimes gz$ és O^n -n $g \in G$ úgy, hat, mint $\varphi(g)$.

Definíció

Legyen $M \in \Lambda(G)$ -modulus. Ekkor M G -Euler karakterisztikája véges, ha minden $H_i(G, M)$ véges minden $i \geq 0$ és

$$\chi(G, M) = \prod_{i \geq 0} \#(H_i(G, M))^{(-1)^i}.$$

Definíció

Legyen $M \in \mathfrak{M}_H(G)$. Legyen $f_{i,M}$ az $H_i(H, M)$ karakterisztikus hatványsorai, mint $\Lambda(\Gamma)$ modulus. Ekkor a következő kifejezést, M Akashi sorának hívjuk

$$\text{Ak}(M) = \prod_{i \geq 0} f_{i,M}^{(-1)^i} \text{ mod } \Lambda(\Gamma)^\times.$$

Ha M egy O -modulus is akkor $H_i(H, M)$ -et tekinthetjük, mint végeseng generált $\Lambda_O(\Gamma)$ -modulus. Legyen $g_{i,M}$ $H_i(H, M)$ karakterisztikus hatványsora, mint $\Lambda_O(\Gamma)$ -modulus. Ekkor

$$\text{Ak}_O(M) = \prod_{i \geq 0} g_{i,M}^{(-1)^i} \text{ mod } \Lambda_O(\Gamma)^\times.$$

Tétel

Tegyük fel, hogy G -nek nincs p -ad rendű eleme. Legyen $M \in \mathfrak{M}_H(G)$ és ξ_M a karakterisztikus eleme M -nek. Minden folytonos reprezentációra $\varphi : G \rightarrow GL_n(O)$, aminek a G -Euler karakterisztikája véges tudjuk, hogy

$$\xi_M(\varphi) \neq 0, \infty,$$

és

$$\chi(G, tw_{\hat{\varphi}}(M)) = |\xi_M(\varphi)|_p^{-m_p},$$

ahol $m_p = |L : \mathcal{Q}_p|$ és $\hat{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})^T$

Köszönöm a figyelmet!