

Érintőgráfok

Egyéni kutatómunka 2.

Osztényi József

Témavezető: Keszegh Balázs

A jelen beszámoló tartalmazza a korábbi féléves egyéni kutatómunkám is, mivel a félév során továbbra is ugyanazon témával foglalkoztam és egyben akartam hagyni a témával foglalkozó írásomat. Ebben a félévben a 3 fejezettől indulva a beszámoló végéig található résszel foglalkoztam leginkább.

1 Bevezetés

A téma alapvető célja a görbék közötti maximális számú érintések vizsgálata. Két görbe érinti egymást, ha pontosan egy közös pontjuk van és ebben a metszéspontban nem keresztezik egymást (pontos definiálás lentebb).

A téma síkbeli görbékkel foglalkozik, amik alatt Jordan-görbéket értünk, vagyis egy injektív folytonos függvény képe egy zárt intervallumból $\mathbb{R}^2$ -be. Egy görbét *x-monoton*-nak hívunk, ha nincs két olyan pontja, melyeknek az *x*-koordinátája megegyezne. Olyan görbecsaládokkal foglalkozunk, amelyekben minden görbepár metszéspontjainak száma véges. Egy görbecsaládot *t-metsző*-nek hívunk, ha a családban szereplő görbepárok metszéspontjainak száma legfeljebb *t*. Továbbá egy görbét *bi-infinít*-nek hívunk, ha bármely *x*-koordináta esetén van olyan görbebeli pont, amely felveszi azt.

Két görbének *p* metszéspontja akkor keresztezési pont, ha van egy kis *D* kör, aminek a középpontja *p* és nincs benne több metszéspontja a két görbének, továbbá mindkettő görbe pontosan 2 pontban metszi *D*-nek a határát és ezen 4 pont ciklikus sorrendjében nincs kettő egymásutáni pont, amely egy görbéhez tartozik. Ha két görbe pontosan egy olyan pontban metszi egymást, amely nem keresztezési pont, akkor azt mondjuk, hogy a két görbe abban a pontban érinti egymást. Ezen érintések száma a görbecsalád érintő párjainak száma. Természetesen lehetséges, hogy egy pontban több görbe is érinti egymást. Erre jó példa az x^{2k} függvények, ahol $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ és a $[-1, 1]$ intervallumból képezzük a függvényeket. A továbbiakban minden görbecsaládról feltesszük, hogy bármely három görbének nincs közös pontja, hogy előbbi eset ne álljon fenn.

Adott egy görbecsalád, akkor az érintőgráfjukat az alábbi módon definiáljuk:

- a csúcsai megfelelnek a görbéknek,
- két csúcs között él megy, ha a megfelelő görbék érintik egymást.

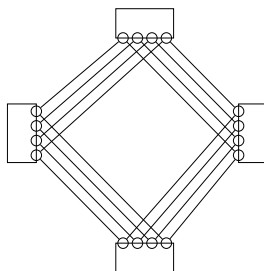
Ezzel a megfogalmazással az a célunk, hogy bizonyos görbecsaládok esetében felismerhetjük, hogy érintőgráfuk mindig egy bizonyos fajtájú gráf lesz (pl.: fagráf, síkgráf), amivel tudunk becslést adni az érintőgráf éleinek számára. Kezdsnek tekintsünk két speciális esetet.

Állítás 1.1. [5] Adott egy $\mathcal{C}$ n elemű görbecsalád, bármely kettő görbe legfeljebb egy pontban metszi egymást, továbbá minden metszéspontja érintési pont. Legfeljebb $3n-6$ az érintések száma a $\mathcal{C}$ családban.

Bizonyítás. A $\mathcal{C}$ görbecsalád minden görbéjéhez rendeljünk hozzá egy reprezentáló csúcsot, ezen pont legyen a görbe egy tetszőleges pontja, ami nem esik egybe egyetlen érintési ponttal sem. Az érintőgráf két csúcsa között pedig fusson az alábbi módon él, ha a két görbe érinti egymást. Legyen c_1 és c_2 görbék, amik érintik egymást és legyenek reprezentáló pontjaik F és G . Ekkor az él induljon F pontból és fusson c_1 görbén egészen a $c_1 \cap c_2$ érintési pontig, majd onnan haladjon tovább c_2 görbén a G pontig. Ezt az élhúzási műveletet végezzük el minden érintési pont esetén, az világos, hogy ebben az esetben lehetséges több él is egybe fog esni az adott görbéken, de meggondolható, hogy ez a folyamat precízzé tehető, hogyha görbéknek minimális kiterjedést adunk, vagyis "felfűjjük" őket és az élek behúzása során figyelünk arra, hogy azok ne metszék el egymást. Ekkor az érintőgráfról látható, hogy egy síkgráf lett, aminek éleire fennáll az Euler-formula, vagyis legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. $\square$

Állítás 1.2. [6] Legyen $\mathcal{C}$ egy n elemű görbecsalád (metszéspontjainak számára nincsen korlát). Ekkor létezik olyan $\mathcal{C}$, hogy $\Theta(n^2)$ legyen az érintések száma a családban.

Bizonyítás. A $\mathcal{C}$ családot osszuk kettő $n/2$ elemű görbecsaládra, amiknek elemei páronként érintik egymást, vagyis $\lfloor n^2/4 \rfloor$ érintést adnak. Ezt még úgy is meg lehet tenni, hogy minden görbe zárt és konvex. Az 1.1 ábra mutatja az $n = 8$ esetet és általánosítható nagyobb n -ekre és minden esetben $\lfloor n^2/4 \rfloor$ érintés kapunk.



Ábra 1.1: n sokszög között $O(n^2)$ érintés.

$\square$

Ezek alapján látható, hogy érdekes eseteket leginkább akkor kapunk, ha van felső korlátja egy görbepár metszéspontjai számának. Elsőnek olyan eseteket fogunk vizsgálni, amikor két olyan családnak van, amelyek mindegyike páronként diszjunkt görbékből áll. Másodjára pedig arra az esetre koncentrálnunk, amikor egy görbecsaládnak van.

2 Két görbecsalád érintéseinek száma

A görbék halmaza kettő görbecsaládból áll (legyenek piros és kék görbék a továbbiakban), továbbá adott családon belül bármely két görbe nem metszi egymást. Ekkor az érintőgráfunk páros gráfot alkot. Pach, Suk és Trembl [12] cikkükben több két görbecsaládos eredményt mutatnak be. Az egyik eredményükben a görbecsaládokat zárt görbék alkotják és ezeknek az érintési számukra adnak felső becslést.

Tétel 2.1. [12] *Legyen $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cup \mathcal{K}$ egy $n > 5$ darab konvex zárt görbéből álló család a síkban, ahol a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{K}$ családok páronként diszjunkt görbékéből állnak. Ekkor a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{K}$ tagjai közötti érintések száma legfeljebb $4n - 16$.*

A tétel bizonyítása indukcióval történik. A bizonyítás egyik fő ötlete abban rejlik, hogy a konvex alakzatokat lecseréljük az érintési pontjaik által meghatározott konvex burokra és tudjuk venni ezen csúcsokat egy gráf csúcsainak, és az oldalakat pedig éleknek a gráfban. Természetesen, ekkor lesznek a gráfnak olyan lapjai, amik az eredeti sokszögek között nem szerepelnek. Ezen külső oldalak a számát lehet felülről becsülni, úgy hogy ha két külső háromszög oldal találkozik egy pontban, akkor abban a pontban az egyik belső sokszög legalább 6 oldalú. Ezzel megkaptuk a bizonyítás második fő gondolatát és az Euler-féle poliéder tétel alkalmazásával és pár átalakítás után adódik a tételben kimondott eredmény.

A cikkben továbbiakban x -monoton görbecsaládokkal foglalkoznak.

Tétel 2.2. [12] *Legyen $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cup \mathcal{K}$ egy n elemű x -monoton görbecsalád. A $\mathcal{P}$ olyan páronként diszjunkt piros görbékéből áll, amelyek bal végpontjai egy l függőleges egyenesre esnek (baloldali zászló), a $\mathcal{K}$ pedig olyan páronként diszjunkt kék görbék családjá, amelyek teljesen az l egyenestől jobbra helyezkednek el. Akkor a görbék közötti piros-kék érintések száma legfeljebb $30n \log n$.*

A bizonyítás indukción alapszik, aminek az alapja, hogy veszünk egy l' függőleges egyenest, ami felezi a $\mathcal{K}$ görbecsaládot egy adott módon. Természetesen a témakörben az is fontos szerepet játszik, hogy adott felső korlátokhoz tudjunk adni konstrukciót, ami felveszi nagyságrendileg azt az érintési számot. A cikkben ehhez a tételhez találhatunk is ilyet, ami a következőt adja:

A konstrukció rekurzió alapszik. Legyen $\{p_1, \dots, p_{n/2}\}$ és $\{k_1, \dots, k_{n/2}\}$ egy piros baloldali zászló és egy kék jobboldali zászló. Zászló alatt olyan egyenest értünk, amin az összes görbe merőlegesen áthalad. Esetünkben legyenek ezek az egyenesek a $x = 2$ egyenletű egyenes, illetve $x = 3$ egyenlettel definiált egyenes. Mivel indukciót használunk, emiatt ezek között $f_1(n/2)$ darab érintés van. Legyen $\{p_{n/2+1}, \dots, p_n\}$ és $\{b_{n/2+1}, \dots, b_n\}$ egy piros baloldali zászló és egy kék jobboldali zászló hasonlóan $x = 0$ és $x = 1$ egyenlettel definiálva, amelyek között hasonlóan $f_1(n/2)$ érintés van indukció miatt. Könnyű belátni, hogy az r_i ($i \leq n/2$) görbék balra, a b_j ($j > n/2$) görbék pedig jobbra meghosszabbíthatók, amíg az $x = 0$, illetve az $x = 3$ egyeneseket nem érintik, így r_i minden $i \leq n/2$ esetén felülről érinti a $b_{i+n/2}$ -t az $1 < x < 2$ függőleges sávban. Tehát az n -tagú baloldali és n -tagú jobboldali zászló közötti érintkezések maximális számára a $f_1(n) \geq 2f_1(n/2) + n/2$ rekurzió adható, amiből kapjuk a $f_1(n) = \Omega(n \log n)$ eredményt.

A 2.2 tétel egy speciális esete a következő tételnek és a bizonyítása során használva is volt.

Tétel 2.3. [12] Jelölje $f(n)$ a síkban két x -monoton görbékkel álló n tagú családok közötti legnagyobb érintés számot, ha az egyes családok páronként diszjunkt görbékkel állnak. Ekkor $\Omega(n \log n) \leq f(n) \leq O(n \log^2 n)$.

Az alsó korlátot itt is ugyanaz adja, mint fentebb és a felső korlát bizonyítása itt is indukcióval zajlik.

Később Keszegh és Pálvölgyi ezt az eredményt megjavította és a [9] cikkben publikálta több témakörbe vágó eredménnyel együtt. A cikkükben a felső korlátot $O(n \log n)$ -re javították meg, ami egybeesik az alsó korláttal. Keszegh, Pálvölgyi és Ackermann a [2] cikkükben megjegyzik, hogy a [12] cikkben lévő alsó korlát konstrukciójában a különböző színű görbéknek legfeljebb két közös pontjuk van, emiatt ez felveti azt a kérdést, hogy kisebb korlát áll-e fenn, ha a két családnak 1-metsző, amire a következő tétel választ is ad.

Tétel 2.4. [2] Adott egy n darab piros és kék görbékkel álló 1-metsző görbecsalád, úgy hogy két azonos színű görbe nem metszi egymást, ekkor a görbék közötti érintések száma legfeljebb $O(n)$.

Természetesen, ha elhagyjuk az 1-metsző tulajdonságot, akkor nagyságrendileg nagyobb alsó korlátra tudunk konstrukciót adni, amit Keszegh és Pálvölgyi a [9] cikkben írt le.

Tétel 2.5. [9] Létezik egy olyan n darab görbékkel álló piros és kék görbecsalád, amelyben bármely két azonos színű görbe nem metszi egymást és a görbék közötti érintések száma $\Omega(n^{4/3})$.

A konstrukció alapját Erdős és Purdy híres konstrukciója adja, amiben adott n darab pont és n darab egyenes a síkon és a konstrukcióban a köztük lévő illeszkedések száma $\Omega(n^{4/3})$ nagyságú. A konstrukcióban az egyik család a pontok módosítása lesz, míg a másika család az egyenesek olyasfajta módosítása lesz, hogy eleget tegyenek a tételben szereplő feltételnek.

3 Érintések száma egy görbecsaládban

Rengeteg érdekes kérdés merül fel, ha egyetlen görbecsalád van és továbbá feltétel, hogy minden görbepárnak legyen metszéspontja. Pár ábra rajzolás után érzékelhető, hogy ez a feltétel kisebb szabadságot és érintési számot fog eredményezni, mint az eddig látott eredmények. Pach a következő sejtést fogalmazta meg a témában:

Sejtés 3.1. Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan n elemű görbecsalád, melyben minden görbepár pontosan egy pontban metszi egymást, ami keresztezés vagy érintés. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma $O(n)$.

Eddig nem sikerült senkinek sem az általános esetet belátnia, de görbék speciális családjaira igazolt a sejtés. Ackermannnak és Keszeghnek sikerült a sejtést belátnia x -monoton görbecsaládra a [1] cikkükben. Györgyi, Hujter és Kisfaludi-Bak [7] cikkben igazolták a 3.1 sejtést abban a speciális esetben, amikor a $\mathcal{C}$ által meghatározott ábrában konstans számú tartomány tartalmazza a görbék összes végpontját.

Tétel 3.2. [1] Legyen $\mathcal{C}$ egy n elemű x -monoton görbékkel álló család, továbbá minden görbepár pontosan egy pontban metszi egymást, ami keresztezés vagy érintés. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma legfeljebb $1160n$.

A bizonyítás alapötlete az, hogy esetekre osztják az érintéseket aszerint, hogy a két érintő görbe x -koordinátára vonatkozó projekciója szerint teljes mértékben tartalmazza a másikat vagy nem. Mindegyik esetben az adott érintőgráfról látnak be egy-egy speciális feltételt. Az egyik esetben az élek bizonyos lineáris méretű részét törölve a maradék élek erdőt alkotnak. A másik esetben is speciális részekre lehet bontani, amikben a megmaradt éleket tudjuk úgy rendezni, hogy ezen rendezés tekintetében nem lehet hosszú monoton növekvő út, ami szintén lineáris felső korlátot ad csúcsok számára nézve. Ebben az esetben Rödl tételét használják.

A félévem során a 3.1 sejtéshez kapcsolódó sejtéssel próbálkoztam, amely így szól:

Sejtés 3.3. Legyen $\mathcal{C}$ egy n elemű k -metsző, x -monoton és bi-infinít görbecsalád, továbbá bármely kettő görbe legalább egyszer metszi egymást. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma $O(n)$.

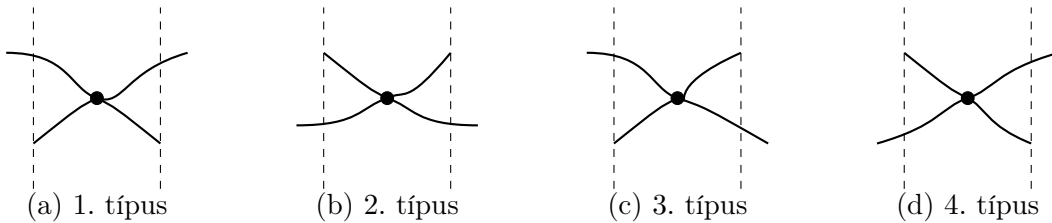
A sejtésből következne a következő sejtés is (ezt belátom lentebb), amiben a k megegyezik az előbbi sejtés k értékével.

Sejtés 3.4. Legyen $\mathcal{C}$ egy n elemű $(k-2)$ -metsző, x -monoton görbecsalád, továbbá bármely kettő görbe legalább egyszer metszi egymást. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma $O(n)$.

A fejezet további részében szereplő, nem hivatkozott eredmények Eyal Ackermann és a témavezetőm közös, cikkben nem szereplő eredményei, amelyeket Balázssal folytatott konzultációk során ismertem meg.

Állítás 3.5. A 3.3 sejtésből következik a 3.4 sejtés.

Bizonyítás. Valójában négyféle görbecsaládot fogunk definiálni, attól függően, hogy az adott érintkezés milyen módon történik. Az osztályozás alapja az, hogy a görbék x -tengelyre vett vetületei hogyan helyezkednek el egymáshoz képest – ahogyan a 3.1 ábrán is látható.



Ábra 3.1: Érintési pontok fajtái.

Tekintsük a $\mathcal{C}$ n elemű $(k-2)$ -metsző, x -monoton görbecsaládot, amire teljesül, hogy bármely kettő görbe legalább egyszer metszi egymást. Ebből szeretnénk egy $\mathcal{C}'$ n elemű k -metsző, x -monoton és bi-infinít görbecsaládot, amire fennáll, hogy bármely kettő görbe legalább egyszer metszi egymást.

A $\mathcal{C}$ görbecsalád minden görbáját szeretnénk "meghosszabítani" x -tengely szerint mindkét irányba, hogy bi-infinit legyen. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{C}$ család görbéinek bal végei különböző x -koordinátával rendelkeznek. Ha ez nem teljesülne, akkor az ábrát kismértékben elforgatva elérhetjük, hogy ez a tulajdonság teljesüljön anélkül, hogy a többi követelményt megsértenénk. Hasonló módon járhatunk el a jobb szélső pontokra is.

Ezután balról jobbra haladva végignézzük a görbék szélső pontjait. Minden pontnál a következő meghosszabbítási lépést hajtjuk végre: kiindulva a görbe végpontjából, szinte függőlegesen haladunk felfelé vagy lefelé egy olyan egyenessel, amelynek meredeksége nagyobb, mint bármely más görbének bármely pontjában.

Azt, hogy felfelé vagy lefelé haladunk, az határozza meg, hogy melyik típusú érintést nem szeretnénk "elrontani" a 3.1 ábrán szereplő négy típus közül. Például az 1. típusnál, ha a bal oldali végpontokból lefelé indulunk, ahogyan a jobb oldaliakból is, mivel így minden görbe ugyanabba az irányba nyúlik ki, és a kiemelt érintések megmaradnak. A többi eset ehhez hasonlóan kezelhető: minden esethez létezik egy "megfelelő" irány a bal és jobb végeknél.

Ezen felfelé vagy lefelé menet során minden más görbével legfeljebb egyszer találkozunk a meredekség miatt és a görbék x -monoton tulajdonsága miatt. Bármely kettő görbének van közös pontja, emiatt a bal szélső pontok és a jobb szélső pontok elválaszthatók egy függőleges egyenessel, emiatt két ilyen meghosszabítás, melyek nem azonos végen vannak nem metszik egymást, vagyis legfeljebb kettővel nő két görbe között a metszések száma. Vagyis tudjuk alkalmazni a kapott négy $\mathcal{C}'$ családra külön-külön a 3.3 sejtést és összeségében minden érintés reprezentálva lett az egyik családban.

□

A fejezet további részében a 3.3 sejtéssel kapcsolatos eredményekkel foglalkozunk. Ezek között szerepelni fog egy általános állítás k -től függetlenül és továbbá $k = 1, 2$ esetek bizonyítása.

Továbbiakban a görbéket nevezzük $c_1, c_2, \dots, c_n$ -nek és legyen c_i és c_j görbék metszési pontjaik rendre $I_1(c_i, c_j), I_2(c_i, c_j), \dots, I_l(c_i, c_j)$ balról jobbra haladva. Ezek mellett $c_i(I_s(c_i, c_j), I_t(c_i, c_l))$ -vel fogjuk jelölni a c_i görbe azon részét, ami $I_s(c_i, c_j)$ és $I_t(c_i, c_l)$ pontok között helyezkedik el. Természetesen, ha két görbének csak egy metszete van, akkor azt nem fogjuk jelölni alsó indexszel. Ha két görbéről vagy pontról egyértelműen elmondható, hogy x vagy y koordináta szerint nagyobb a másikról, akkor a $c_i <_y c_j$ -vel fogjuk jelölni.

Állítás 3.6. *Legyen $\mathcal{C}$ egy n elemű k -metsző, x -monoton és bi-infinit görbecsalád, továbbá bármely kettő görbe legalább egyszer metszi egymást. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsalád által indukált érintőgráf páros gráfot alkot minden esetben, más szavakkal élve nincsen benne páratlan hosszú kör.*

Bizonyítás. Az állítással egy ekvivalens állítást fogunk belátni, ami a következő:

Bármely görbére igaz, hogy az őt érintő összes görbe a görbe alatt vagy az összes a görbe felett helyezkedik el. Az alatt és a felett szó alatt azt értem, hogy minden x -koordináta esetén ugyanaz reláció áll fenn a két görbe között.

Tegyük fel, hogy van olyan görbe, amit érintenek alulról és felülről is. Vegyünk egy alsó és egy felső görbét, ekkor ezeknek nem lehet közös pontja, mivel elválasztja őket a görbe, melyet mindketten

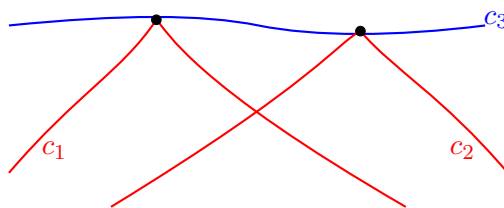
érintenek. Ellentmondást kaptunk, vagyis a görbék két csoportba bonthatók az alapján, hogy alulról vagy felülről érintik őket. (Lehetséges, hogy egyes görbék egyik csoportba sem tartoznak, de ez azt jelenti, hogy izolált csúcsok, vagyis nem rontják a páros gráf feltételét.)

Továbbá az is igaz, hogy két egy csoportban lévő görbe nem érinti egymást, mert ha érintenék egymást, akkor az egyik a másik csoportban lenne definíció alapján. Vagyis ez a felbontás valóban egy páros gráfot ad. $\square$

Állítás 3.7. *Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan n elemű 1-metsző, x -monoton és bi-infinít görbecsalád, továbbá bármely kettő görbe legalább egyszer metszi egymást. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma legfeljebb $n-1$.*

Bizonyítás. A 3.6 állítás miatt tudjuk, hogy a gráfunk egy páros gráf. Ha belátjuk, hogy nincs páros hosszú kör a gráfban, akkor megkaptuk az állítást, mert egy erdő gráfnak legfeljebb $n-1$ éle van.

Tegyük fel, hogy van 4 hosszú kör a gráfban.



Ábra 3.2: Kék görbe, ami felülről érinti kettő pirosat.

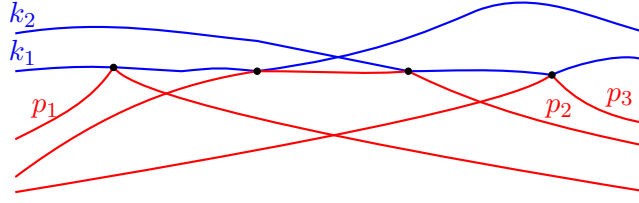
A 3.2 ábrába kéne berajzolni egy második kék görbét, ami érinti a c_1 -t és c_2 -t. Legyen ez a kék görbe a c_4 . A c_4 egyszer metszi el a c_3 -t, esetekre tudjuk bontani az alapján, hogy a $I(c_3, c_4)$ hol helyezkedik el c_3 többi metszéspontjához képest.

Ha $I(c_3, c_4) <_x I(c_2, c_3)$, akkor $c_4 >_y c_3 \geq_y c_1$, ha $I(c_2, c_3)$ ponttól jobbra nézzük, vagyis c_1 és c_4 sosem metszi egymást, mert $I(c_2, c_3)$ ponttól balra tudja csak érinteni c_2 -t, vagyis ott fennáll, hogy $c_4 >_y c_1$, ami ellentmondást ad.

Ha $I(c_2, c_3) \leq_x I(c_3, c_4) \leq_x I(c_1, c_3)$, akkor a $I(c_1, c_2)$, $I(c_1, c_3)$ és $I(c_2, c_3)$ pontok közötti görbék által határolt tartományból nem jut ki c_4 , ha érinti c_1 -t és c_2 -t is, vagyis megint ellentmondást kaptunk.

Ha $I(c_3, c_4) >_x I(c_1, c_3)$, akkor $c_4 >_y c_3 \geq_y c_2$, ha $I(c_1, c_3)$ ponttól balra nézzük, vagyis c_2 és c_4 sosem metszi egymást, mert $I(c_1, c_3)$ ponttól jobbra tudja csak érinteni c_1 -t, vagyis ott fennáll, hogy $c_4 >_y c_2$, ami ellentmondást ad.

Vagyis minden esetben ellentmondást kaptunk, emiatt nincsen C_4 a gráfban. Ezt a bizonyítást el tudjuk végezni nagyobb páros körök esetén, mert indukciót alkalmazva vissza tudjuk vezetni kisebb esetekre. A 3.3 ábrán látható 5 görbéből álló családhoz kéne egy k_3 -t rajzolni, ami érinti p_1 -et és p_3 -at. Ha k_3 bal oldalon k_1 alól vagy k_2 felettől indul, akkor hasonlóan ellentmondást kapunk mint fentebb. Ha k_3 az k_1 és k_2 között indul balról, akkor vehetjük k_1 és k_2 görbe helyett a $k_1(-, I(k_1, k_2)) \cap k_2(I(k_1, k_2), -)$ görbét és tudjuk a p_2 görbét úgy deformálni, hogy az új kapott görbét csak egyszer érintse. Természetesen ez nem felel meg teljesen a valóságnak, de p_2 módosítása miatt nem lehetséges itt sem a k_3 megfelelő berajzolása.



Ábra 3.3: Két kék görbe, ami felülről érint kettő, kettő pirosat.

Vagyis megkaptuk, hogy a $\mathcal{C}$ család által indukált érintőgráfról, hogy nincs benne kör. Ez ekvivalens azzal, hogy G egy erdő, vagyis legfeljebb $n-1$ éle van. Tehát legfeljebb $n-1$ érintés van a családban. $\square$

A következőkben a $k = 2$ esetről is írok, de előbb definiálunk egy fogalmat, hogy a [3] cikkben szereplő 2.4 tételről érthető legyen, hogy miért ekvivalens ezzel az esettel.

Definíció 3.8. Egy $\mathcal{C}$ család pseudo-parabola, hogyha minden görbe folytonos, minden valós számon értelmezett függvény és továbbá bármely kettőnek legfeljebb kettő metszéspontja van.

Világos, hogy a 3.3 sejtésben definiált család pseudo-parabola, ha $k = 2$, vagyis a [3] cikkben szereplő 2.4 tétel megadja ezt.

Tétel 3.9. [3] Legyen $\mathcal{C}$ a síkban n páronként metsző pseudo-parabolák családja. Ekkor a görbepárok között legfeljebb $2n - 4$ érintkezés van, ha $n \geq 3$.

A bizonyítás ötlete azon alapszik, hogy veszünk egy olyan függőleges l egyenest, ami minden metszésponttól balra helyezkedik el. A görbét reprezentáló csúcsok az érintőgráfban az adott görbe metszete az l függőleges egyenessel. A bizonyítás további részében belátják, hogy lehet az éleket úgy behúzni a pontok között, hogy azok ne metszék egymást és ezek mellett meggondolható, hogy a 3.6 állítás miatt páros gráf lesz az érintő gráf, vagyis legfeljebb $2n - 4$ él lehet benne.

Az egy görbecsaládra vonatkozó ismert eredményeket a 3.4 táblázatban összegzem.

Görbe típusa	k -metsző	Érintések száma	Felső korlát
Általános	legalább 1 ¹ , $k = 1$	3.1 sejtés: $\Theta(n)$	
Általános	k	$O(n^{2-1/(k+3)})$	Keszegh & Pálvölgyi [9]
x -monoton	legalább 1 ¹ , $k = 1$	$\Theta(n)$	Ackerman & Keszegh [1]
x -monoton	$k = 1$	$O(n^{4/3} \log(n)^{2/3})$	Pach & Sharir [11]
x -monoton, bi-infinit	legalább 1 ¹ , $k = 2$	$\Theta(n)$	Pach és társai [3]
x -monoton, bi-infinit	$k = 1$	$O(n \log(n))$	Pach & Sharir [11]

Táblázat 3.4: Egy görbecsaládról ismert eredmények összegzése.

¹Minden görbepárnak van legalább egy közös pontja.

4 Felső korlát metszet-fordított sorozatok méretére és alkalmazásai

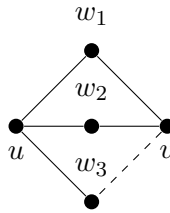
Több érintőgráfokkal foglalkozó cikket olvasva találkoztam Marcus és Tardos [10] munkájával, amely számos esetben adott felső korlátot egyes érintési számok maximumára. Emiatt a félévem során feldolgoztam ezt a cikket is, nem mellesleg amiatt, mert egy szemináriumi előadást is tartottam belőle. A feldolgozás elején jelezték nekem, hogy azóta Tardos más szerzőtársaival együtt tovább javította az eredményt, amelyet a [8] cikkben publikáltak. Ebben a fejezetben szeretnék betekintést nyújtani az érintőgráfok ezen területébe.

Definíció 4.1. Legyenek $A^1, A^2, \dots, A^n$ egy véges halmaz elemeinek ciklikus sorozatai. Két ciklikus sorozatot, A^i -t és A^j -t metszet-fordítottak nevezünk, ha a közös elemek fordított sorrendben szerepelnek a két ciklikus sorozatban. $A^1, A^2, \dots, A^n$ sorozatokat akkor nevezzük metszet-fordítottak, ha bármely kettő ciklikus sorozat metszet-fordított.

Ha veszünk egy topológiai gráfot, abból könnyen előállíthatunk ilyen ciklikus halmazokat. Egy adott v csúcs esetén tekintsük $L_G(v)$ -t, a v csúcs szomszédainak listáját, amelyet úgy rendeztünk, hogy az élek v -beli kezdőpontjai óramutató járásának megfelelő sorrendben szerepelnek.

Állítás 4.2. [13] Legyen G egy topológiai gráf és vegyük $L_G(v)$ ciklikus halmazokat. Ha létezik $L_G(v)$ és $L_G(u)$ sorozatok, amelyek nem metszet-fordítottak, akkor G -ben található önmetsző C_4 .

Bizonyítás. Ha $L_G(s) \cap L_G(t) \leq 2$, akkor $L_G(s)$ és $L_G(t)$ metszet-fordítottak, vagyis $L_G(v) \cap L_G(u) \geq 3$. A 4.1 ábrán látható, hogy $L_G(v)$ és $L_G(u)$ csak akkor lesznek metszet-fordítottak, ha a szaggatott él v -ből a másik két él között indul ki. Ebben az esetben azonban a többi él közül legalább az egyiket metszi, ami azt jelenti, hogy egy önmetsző C_4 -et kaptunk.



Ábra 4.1: 4.2 állítás szemléltetése.

□

Továbbá Pinchasi és Radoičić ebben a cikkében belátta, hogy egy olyan topológiai gráfnak, amely nem tartalmaz önmetsző C_4 -et, legfeljebb $O(n^{8/5})$ éle lehet. A bizonyítás metszet-fordított sorozatok segítségével történt. Ezt az eredményt Marcus és Tardos javította a korábban említett [10] cikkben, míg a végső, éles korlátot a [8] cikk adta meg. Az, hogy ez a korlát éles, abból következik, hogy $ex(n, C_4) = \Theta(n^{3/2})$, ahogyan az a [4] cikkben olvasható. Vagyis nincsen két olyan csúcs, aminek lenne kettő közös szomszédja, tehát bármely $L_G(v)$ és $L_G(u)$ sorozatnak legfeljebb egy közös eleme lehet, ami természetesen metszet-fordított.

Tétel 4.3. [8] Legyen $A^1, A^2, \dots, A^n$ metszet-fordított ciklikus sorozatok, amik rendre n elemű halmaz részhalmazai. Ekkor $\sum_{i=1}^n |A^i| = O(n^{3/2})$.

A cikkben ennél egy erősebb állítást láttak be.

Tétel 4.4. [8] Létezik egy $C > 0$ konstans, amelyre minden pozitív egész n esetén, ha $A^1, A^2, \dots, A^n$ lineárisan rendezett sorozatok, amelyek rendre egy n elemű halmaz részhalmazai, és nincs olyan három elem, amely két különböző sorozatban azonos sorrendben jelenik meg, akkor teljesül:

$$\sum_{i=1}^n |A^i| < Cn^{3/2}.$$

A bizonyítás hosszú és témája eltér az összefoglalóm témájától, emiatt nem említek meg belőle elemeket. Ezzel szemben térjünk rá, hogy ez a témakör hogyan alkalmazható az érintőgráfok esetén, ez az állítás a 2.5 állításhoz kapcsolódó felső korlát belátása lesz.

Tétel 4.5. [9] Legyen $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cup \mathcal{K}$ egy n elemű görbecsalád, ahol $\mathcal{P}$ páronként diszjunkt piros, $\mathcal{K}$ is páronként diszjunkt kék görbékből áll. Ekkor a piros és kék görbék közötti érintések száma legfeljebb $O(n^{3/2})$.

Először definiálok, hogy hogyan fogjuk a családhoz tartozó érintőgráfot felvenni a síkban. Minden δ görbéhez kiválasztok egy tetszőleges pontot rajta, ezt jelölöm p_δ -val, ez lesz a reprezentáló csúcsa a gráfban. Ezután δ^* jelöléssel egy csillag alakú görbét rajzolunk, amelynek $p_\delta \in \delta^*$ középpontja, és minden olyan érintkezés x esetén, ahol δ egy másik görbével érintkezik, egy egyszerű ívet húzunk p_δ -ból x -be, amely szorosan követi az eredeti görbét. Látható, hogy az induló ívek páronként diszjunktak. Továbbá fennáll, hogy ha δ egy másik görbét érintett, akkor az x -be vezető ív kerüli ezt a másik görbét (kivéve magát az érintési pontot), viszont ha δ egy másik görbét metszett, akkor a hozzárendelt ívet is elmetszi. Ezt az eljárást minden görbére megismételjük, mindegyiket egy ilyen csillag alakú ábrává alakítva, miközben megtartjuk a görbék közötti diszjunkságot és érintéseket.

Ekkor úgy kapjuk meg a G gráfunk egy reprezentációját, hogy a csúcsok megfelelnek görbéken kijelölt pontoknak és egy érintést reprezentáló él rendre egy kék és egy piros élrészből fog állni, amik az érintési pontban találkoznak. Vagyis ez a görbecsalád egy érintőgráfja. A görbecsalád tulajdonságai miatt fennáll, hogy ha uv él létezik, akkor az u és v által meghatározott csillagalakzatok kizárólag az érintési pontban találkoznak és az azonos színű élrészek sem metszhetik egymást. Ez alapján belátható az alábbi állítás.

Állítás 4.6. [9] Az így kapott G érintési gráf nem tartalmaz önmetsző utat öt élrészből, vagyis nem tartalmaz G önmetsző C_4 -et, sem önmetsző utat két élből.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy út öt élrészből, továbbá feltehető ezek színe sorrendben: piros, piros, kék, kék, piros. Jelöljük az első két piros élrész közötti csúcsot u -val, a két kék élrész közötti csúcsot v -vel, az utolsó piros élrészhez tartozó csúcsot pedig w -vel. Az azonos színű élrészek nem metszik egymást. A két kék élrész (melyek v -hez tartoznak) nem metszik olyan az élrészeket, amelyek v -hez szomszédos csúcsokhoz tartoznak. Viszont minden piros élrész vagy u -hoz vagy w -hez tartozik és mindkét csúcs szomszédos v -vel. Tehát a kérdéses út nem lehet önmetsző. $\square$

Vagyis ezzel beláttuk, hogy a gráf nem tartalmaz önmetsző C_4 -et és a [8] cikk eredménye alapján, akkor legfeljebb $\mathcal{O}(n^{3/2})$ éle lehet, ami éppen a 4.5 tétel bizonyítását adja.

Hivatkozások

- [1] Eyal Ackerman and Balázs Keszegh. On the number of tangencies among 1-intersecting x-monotone curves. *European Journal of Combinatorics*, 2024.
- [2] Eyal Ackerman, Balázs Keszegh, and Dömötör Pálvölgyi. On tangencies among planar curves with an application to coloring l-shapes. *European Journal of Combinatorics*, 2024.
- [3] Pankaj K Agarwal, Eran Nevo, János Pach, Rom Pinchasi, Micha Sharir, and Shakhar Smorodinsky. Lenses in arrangements of pseudo-circles and their applications. *Journal of the ACM (JACM)*, 2004.
- [4] Pál Erdős, Alfréd Rényi, and Vera T Sós. On a problem of graph theory. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 1966.
- [5] Paul Erdős and Branko Grünbaum. Osculation vertices in arrangements of curves. *Geometriae Dedicata*, 1973.
- [6] Esther Ezra, János Pach, and Micha Sharir. On regular vertices on the union of planar objects. In *Proceedings of the twenty-third annual symposium on Computational geometry*, 2007.
- [7] Péter Györgyi, Bálint Hujter, and Sándor Kisfaludi-Bak. On the number of touching pairs in a set of planar curves. *Computational Geometry*, 2018.
- [8] Barnabás Janzer, Oliver Janzer, Abhishek Methuku, and Gábor Tardos. Tight bounds for intersection-reverse sequences, edge-ordered graphs and applications, 2024.
- [9] Balázs Keszegh and Dömötör Pálvölgyi. The number of tangencies between two families of curves. *Combinatorica*, 2023.
- [10] Adam Marcus and Gábor Tardos. Intersection reverse sequences and geometric applications. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2006.
- [11] János Pach and Micha Sharir. On vertical visibility in arrangements of segments and the queue size in the bentley-ottmann line sweeping algorithm. *SIAM Journal on Computing*, 1991.
- [12] János Pach, Andrew Suk, and Miroslav Treml. Tangencies between families of disjoint regions in the plane. In *Proceedings of the twenty-sixth annual symposium on Computational geometry*, 2010.
- [13] Rom Pinchasi and Radoa Radoicic. Topological graphs with no self-intersecting cycle of length 4. In *Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry*, 2003.