

A megvilágítási probléma

Egyéni kutatómunka 2.

Györffi Ádám György
Témavezető: Földvári Viktória

2025. február-május

Kivonat

A megvilágítási probléma arról szól, hogy egy d -dimenziós konvex test felületének teljes megvilágításához legalább hány fényforrásra van szükség. A kérdés azzal ekvivalens, hogy a test hány kicsinyített példányával lehet fedni a testet. Hadwiger sejtése szerint 2^d példány mindig elég, egyenlőség pedig akkor van, ha a test egy d -dimenziós paralelepipedon. $d \geq 3$ esetén a sejtést még nem igazolták, csak részeredmények vannak speciális esetekben. A kutatás célja ezen eredmények megismerése és további speciális esetek vizsgálata.

1. Ekvivalens megfogalmazások

1.1. Definíció (Konvex test). A $K \subset \mathbb{R}^d$ halmazt konvex testnek nevezzük, ha konvex és kompakt és a belseje nem üres.

Az alábbiakban definiáljuk a megvilágítás néhány ekvivalens megfogalmazását:

1.2. Definíció (Íránymenti megvilágítás). A $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test határának $b \in \partial K$ pontját $v \in \mathbb{R}^d$ irányból megvilágítotttnak nevezzük, ha b pontból indított v irányú félegyenes metszi K belsejét. A $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ irányok megvilágítják a K konvex testet, ha annak minden határpontját megvilágítják.

A $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test $I(K)$ iránymenti megvilágítási számának nevezzük a legkisebb n természetes számot, amelyre léteznek $v_1, \dots, v_n$ irányok, amelyek megvilágítják K -t.

1.3. Definíció (Pontból megvilágítás). A $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test határának $b \in \partial K$ pontját a $p \in \mathbb{R}^d$ pontban lévő fényforrás megvilágítja, ha a pb félegyenes metszete K belsejével nem üres. A $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$ pontokban lévő fényforrások megvilágítják a K konvex testet, ha annak minden határpontját megvilágítják.

A $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test $P(K)$ pontokból történő megvilágítási számának nevezzük a legkisebb n természetes számot, amelyre léteznek $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$ pontok, amelyekben lévő fényforrások megvilágítják K -t.

1.4. Definíció (Fedés int K eltoltjaival). A $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test $F(K)$ belső fedési számának nevezzük a legkisebb olyan n természetes számot, melyre K fedhető int K n darab eltoltjával.

1.5. Definíció (Homotetikus fedés). *A $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test $H(K)$ homotetikus fedési számának nevezzük azt a legkisebb n természetes számot, melyre K fedhető n darab 1-nél kisebb arányú homotetikus példányával.*

1.6. Tétel. *Minden $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex testre $I(K) = P(K) = F(K) = H(K) < \infty$. [8]*

2. Hadwiger-sejtés, részeredmények

A kérdés az, hogy a fent definiált megvilágítási/fedési számokra milyen felső becslést tudunk adni.

2.1. Sejtés (Hadwiger). *Minden $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex testre $H(K) \leq 2^d$.*

2.2. Megjegyzés. *A d -dimenziós kockára és annak affin képeire a fenti becslés éles, így ennél jobb felső korlát nem adható.*

A $d = 1$ eset triviálisan igaz, a $d = 2$ -re Levi [5] adott bizonyítást.

$d = 3$ esetén a jelenlegi legjobb felső becslés az általános esetben:

2.3. Tétel (Papadoperakis). *Minden $K \subset \mathbb{R}^3$ konvex testre $H(K) \leq 16$. [7]*

Speciális esetekben már igazolták a sejtést, sőt egyes esetekben még jobb becslést is tudunk mondani.

2.4. Tétel. *Ha $K \subset \mathbb{R}^3$ középpontosan szimmetrikus konvex test, akkor $H(K) \leq 8$. [4]*

2.5. Tétel. *Ha a $K \subset \mathbb{R}^3$ konvex test szimmetrikus egy síkra, akkor $H(K) \leq 8$. [3]*

2.6. Tétel. *Ha $K \subset \mathbb{R}^3$ állandó szélességű konvex test, akkor $H(K) \leq 6$. [1]*

Az általános esetre egyelőre a sejtésnél jóval gyengébb becsléseink vannak. Ezek közül az egyik:

2.7. Tétel. [2] *Minden $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex testre*

$$H(K) \leq \binom{2d}{d} d(\ln d + \ln \ln d + 5).$$

Speciális esetben viszont magasabb dimenzióban is tudunk jobb becsléseket mondani:

2.8. Definíció (Belt politóp). *Egy $P \subset \mathbb{R}^d$ politópot belt politópnak nevezzük, ha minden 2-lapjának minden éléhez található egy vele párhuzamos él az adott lapon.*

2.9. Tétel. *Ha $d \geq 2$, $P \subset \mathbb{R}^d$ belt politóp és P nem parallelotóp, akkor $H(P) \leq 3 \cdot 2^{d-2}$. [6]*

3. Visszavezetés egy kevésbé általános esetre (saját eredmény)

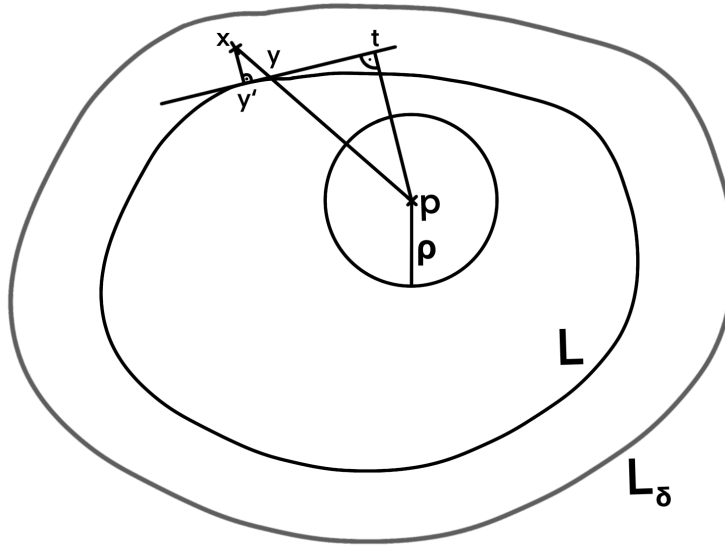
Azt szerettem volna igazolni, hogy a megvilágítási problémát elég a konvex testek egy Hausdorff-metrika szerinti sűrű részhalmazára bizonyítani. Végül ez egy plusz feltétel mellett sikerült, ez olvasható az alábbiakban.

3.1. Állítás. *Legyenek $K, L \subset \mathbb{R}^d$ konvex testek. Legyenek $K_1, \dots, K_k$ homotetikus példányai K -nak, melyek arányai $\lambda_1, \dots, \lambda_k < 1$ és $K \subset \bigcup_{i=1}^k K_i$. Tegyük fel, hogy L tartalmaz r sugarú gömböt, azaz létezik olyan $p \in \mathbb{R}^d$ és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(p) \subset L$. Továbbá tegyük fel, hogy $\max_{i=1}^k \lambda_i < \frac{r-d_H(K,L)}{r+d_H(K,L)}$, ahol $d_H(K,L)$ a K és L Hausdorff-távolsága. Ekkor létezik L -nek k darab 1-nél kisebb arányú homotetikus példánya, amik fedik L -t.*

Bizonyítás.

3.2. Lemma. *Legyen $L \subset \mathbb{R}^d$ konvex test, $B_\varrho(p) \subset L$, $\delta > 0$ és jelölje L_δ az L δ sugarú környezetét. Legyen L' az L p -ből vett $\frac{\varrho+\delta}{\varrho}$ arányú nagyítása. Ekkor $L_\delta \subset L'$.*

Bizonyítás. Mivel p az L -nek belső pontja, és L konvex, így $L \subset L'$. Így elegendő az $L_\delta \setminus L$ pontjaira belátni, hogy L' -beliek.



Legyen tehát $x \in L_\delta \setminus L$. Legyen a px egyenes x -hez legközelebbi L -beli pontja y . Ekkor a py szakasz része L -nek, így elegendő belátni, hogy

$$\frac{|p-x|}{|p-y|} \leq \frac{\varrho+\delta}{\varrho}.$$

Legyen y' az L x -hez legközelebbi pontja. Vegyük az y' -re illeszkedő, az xy' egyenesre merőleges hipersíkot. Ez L -nek egy y' -beli támaszhipersíkja. Állítsunk erre merőlegest p -ből, ennek talppontja legyen t . Ha $y' \neq y$, akkor az xyy' és pyt háromszögek hasonlóak, így

$$\frac{|x-y|}{|p-y|} = \frac{|x-y'|}{|p-t|}.$$

Továbbá t az y' -beli támaszhipersíkon van, így nem lehet L -nek belső pontja. Mivel viszont $B_\varrho(p) \subset L$, így $|p - t| \geq \varrho$. Másrészt $x \in L_\delta \setminus L$ és y' a hozzá legközelebbi L -beli pont, így $|x - y'| \leq \delta$.

Ha $y' = y$, akkor $t = y$ is teljesül és a fentiek ugyanúgy igazak.

Így a következőt kapjuk:

$$\frac{|p - x|}{|p - y|} = \frac{|p - y| + |x - y|}{|p - y|} = 1 + \frac{|x - y|}{|p - y|} = 1 + \frac{|x - y'|}{|p - t|} \leq 1 + \frac{\delta}{\varrho} = \frac{\varrho + \delta}{\varrho}.$$

Ezzel beláttuk a lemmát. $\square$

Legyen $\varepsilon = d_H(K, L)$. Ekkor $L \subset K_\varepsilon$ és $K \subset \bigcup_{i=1}^k K_i$, így $L \subset (\bigcup_{i=1}^k K_i)_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^k (K_i)_\varepsilon$. Így elegendő belátni, hogy minden i -re létezik L -nek olyan 1-nél kisebb arányú homotetikus L_i példánya, melyre $(K_i)_\varepsilon \subset L_i$.

Mivel $d_H(K, L) = \varepsilon$, így L -nek létezik olyan λ_i arányú homotetikus L'_i példánya, hogy $K_i \subset (L'_i)_{\lambda_i \varepsilon}$. Legyen L_i az L'_i nagyítása, melynek középpontja p képe az $L \rightarrow L'_i$ homotécia szerint, az aránya pedig

$$\frac{\lambda_i r + \lambda_i \varepsilon + \varepsilon}{\lambda_i r}.$$

Ekkor ha alkalmazzuk a lemmát L'_i -re, $\varrho = \lambda_i r$ -re, illetve $\delta = \lambda_i \varepsilon + \varepsilon$ -ra, akkor kapjuk, hogy $(K_i)_\varepsilon \subset (L'_i)_{\lambda_i \varepsilon + \varepsilon} \subset L_i$, továbbá L -t L_i -be vivő homotécia aránya

$$\lambda_i \frac{\lambda_i r + \lambda_i \varepsilon + \varepsilon}{\lambda_i r}.$$

Így még azt kell belátni, hogy ez kisebb 1-nél.

$$\lambda_i \frac{\lambda_i r + \lambda_i \varepsilon + \varepsilon}{\lambda_i r} = \frac{\lambda_i r + \lambda_i \varepsilon + \varepsilon}{r} < \frac{\frac{r-\varepsilon}{r+\varepsilon} r + \frac{r-\varepsilon}{r+\varepsilon} \varepsilon + \varepsilon}{r} = \frac{(r-\varepsilon)(r+\varepsilon) + \varepsilon(r+\varepsilon)}{r(r+\varepsilon)} = 1$$

Ezzel beláttuk az állítást. $\square$

3.3. Következmény. *Ha Hadwiger sejtése igaz a konvex testek egy sűrű részhalmazára úgy, hogy csak egy rögzített, $1 > \lambda$ -nál kisebb arányú homotéciákat használunk a sűrű részhalmazbeli testek fedésére, akkor a sejtés minden konvex testre igaz.*

Bizonyítás. Legyen $L \subset \mathbb{R}^d$ konvex test. Mivel L belseje nem üres, így létezik olyan $B_r(p)$ gömb, mely része L -nek. A sűrű részhalmazban ekkor létezik olyan $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test, melyre $d_H(K, L) < r \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$. Ekkor

$$\frac{r - d_H(K, L)}{r + d_H(K, L)} > \frac{r - r \frac{1-\lambda}{1+\lambda}}{r + r \frac{1-\lambda}{1+\lambda}} = \frac{1 - \frac{1-\lambda}{1+\lambda}}{1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}} = \frac{\frac{1+\lambda-1+\lambda}{1+\lambda}}{\frac{1+\lambda+1-\lambda}{1+\lambda}} = \frac{2\lambda}{2} = \lambda,$$

azaz teljesül a fenti állítás feltétele. Így $H(L) \leq H(K) \leq 2^d$. $\square$

A 2.9. Tétel éppen ilyen jellegű eredményt ad, hiszen a belt politópok sűrű részhalmazt alkotnak a konvex testek terében. A bizonyítása viszont nem a Hadwiger-féle megközelítést használja, hanem az iránymenti megvilágítást, így a bizonyításból nem olvasható ki közvetlenül, hogy tudunk-e megfelelő λ felső korlátot adni.

Hivatkozások

- [1] K. Bezdek, Zs. Lángi, M. Naszódi, and P. Papez. Ball-polyhedra. *Discrete & Computational Geometry*, 38(2):201–230, 2007.
- [2] Károly Bezdek and Muhammad A. Khan. The geometry of homothetic covering and illumination. In *Discrete Geometry and Symmetry*, volume 234 of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, pages 1–30. Springer, 2018.
- [3] B. V. Dekster. Each convex body in $\mathbb{E}^3$ symmetric about a plane can be illuminated by 8 directions. *Journal of Geometry*, 69(1–2):37–50, 2000.
- [4] M. Lassak. Solution of Hadwiger’s covering problem for centrally symmetric convex bodies in $\mathbb{E}^3$. *Journal of the London Mathematical Society*, 30:501–511, 1984.
- [5] Friedrich Wilhelm Levi. Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebungen seines offenen Kerns. *Archiv der Mathematik*, 6(5):369–370, 1955.
- [6] H. Martini. Some results and problems around zonotopes. In *Intuitive Geometry, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, Siófok 1985*, volume 48 of *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, pages 383–418. North-Holland, 1987.
- [7] I. Papadoperakis. An estimate for the problem of illumination of the boundary of a convex body in $\mathbb{E}^3$. *Geometriae Dedicata*, 75:275–285, 1999.
- [8] Santiago Rodríguez Sierra. Homothetic covering and the illumination problem of convex bodies, January 2025. Accessed from Universidad de los Andes Institutional Repository.