

A megvívágítási probléma

Györffi Ádám György - Egyéni kutatómunka 2.

Témavezető: Földvári Viktória

Konvex testek megvilágítása

- ▶ Konvex test: $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, konvex halmaz, melyre $\text{int } K \neq \emptyset$.
- ▶ Kérdés: Legalább hány fényforrás kell, hogy megvilágítsuk K felületét?

Ekvivalens megfogalmazások

- ▶ Iránymenti megvilágítás: $I(K)$
- ▶ Megvilágítás pontokból: $P(K)$
- ▶ Fedés int K eltoltjaival: $F(K)$
- ▶ Homotetikus fedés: $H(K)$
- ▶ Tétel: $I(K) = P(K) = F(K) = H(K)$

Hadwiger sejtése

- ▶ A sejtés szerint minden $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex testre $I(K) \leq 2^d$.
- ▶ A $d = 1$ eset triviális.
- ▶ A $d = 2$ esetet Levi bizonyította 1955-ben.
- ▶ $d \geq 3$ esetén az általános kérdés megoldatlan.
- ▶ Ennél jobb becslést nem tudunk mondani, mivel a d -dimenziós kocka affin képeire $I(K) = 2^d$.

Részeredmények

- ▶ $K \subset \mathbb{R}^3$ esetén $I(K) \leq 16$. (Papadoperakis)
- ▶ Ha $K \subset \mathbb{R}^3$ és K középpontosan szimmetrikus vagy szimmetrikus egy síkra, akkor teljesíti a Hadwiger-sejtést. (Lassak, Dekster)
- ▶ Ha $K \subset \mathbb{R}^3$ állandó szélességű konvex test, akkor $I(K) \leq 6$.
- ▶ Általános esetben a legjobb becslés:

$$\binom{2d}{d} d(\ln d + \ln \ln d + 5)$$

Becslés belt politópokra

- ▶ Belt politóp: olyan $P \subset \mathbb{R}^d$ konvex politóp, melynek minden 2-lapjának minden éléhez található egy vele párhuzamos él az adott lapon.
- ▶ Állítás: A belt politópok sűrűek a konvex testek terében a Hausdorff-metrika szerint.
- ▶ Tétel: Ha $d \geq 2$, P belt politóp és nem parallelotóp, akkor

$$I(P) \leq 3 \cdot 2^{d-2}.$$

Visszavezetés speciális esetre (saját eredmény)

- ▶ Ötlet: Ha egy K konvex testre igaz a Hadwiger-sejtés, akkor a Hausdorff-metrika szerinti közeli testekre is igaz a sejtés.
- ▶ Állítás:
 - ▶ Legyenek $K, L \subset \mathbb{R}^d$ konvex testek, $K \subset \bigcup_{i=1}^k K_i$ homotetikus példányok, $\lambda_i < 1$.
 - ▶ $B_r(p) \subset L$.
 - ▶ $\max \lambda_i < \frac{r - d_H(K, L)}{r + d_H(K, L)}$.
 - ▶ Ekkor $I(L) \leq k$.

Az állítás bizonyítása

- ▶ Legyen $\varepsilon := d_H(K, L)$.
- ▶ Ekkor $L \subset K_\varepsilon$, így $L \subset \bigcup_{i=1}^k (K_i)_\varepsilon$.
- ▶ Tehát elég olyan L_i homotetikus példányokat találni, melyekre $(K_i)_\varepsilon \subset L_i$.
- ▶ Léteznek L'_i λ_i arányú homotetikus példányok, melyekre $K_i \subset (L'_i)_{\lambda_i \varepsilon}$.
- ▶ Ezeket kicsit „felfújva” már $(K_i)_\varepsilon \subset L_i$ és az arányok még mindig kisebbek, mint 1.
- ▶ Lemma: $L \subset \mathbb{R}^d$ konvex test, $B_\varrho(p) \subset L$, $\delta > 0$. Legyen L' az L nagyítása p -ből $\frac{\varrho+\delta}{\varrho}$ aránnyal. Ekkor $L_\delta \subset L'$.

Visszavezetés sűrű részhalmazra

- ▶ A megvilágítási problémát elég a konvex testek egy sűrű részhalmazára igazolni az alábbi plusz feltétel mellett:
- ▶ Következmény: Ha Hadwiger sejtése igaz a konvex testek egy (Hausdorff-metrika szerinti) sűrű részhalmazára úgy, hogy csak egy rögzített, $1 < \lambda$ -nál kisebb arányú homotéciákat használunk a sűrű részhalmazbeli testek fedésére, akkor a sejtés minden konvex testre igaz.
- ▶ A belt politópos állítás ilyen eredményt ad, de nem derül ki, hogy teljesül-e a plusz feltétel.

Köszönöm a figyelmet!