

Thue-egyenletek és valós számok

2025. május

Füredi Erik

Egyéni kutatómunka 2

Témavezető: Gyarmati Katalin

1. Bevezetés

Az őszi féléves kutatómunkámban az Erdős-Turán-tétel kétváltozós homogén polinomokra általánosíthatóságával foglalkoztam. Ennek kapcsán merült fel, hogy a Thue-tételhez részben hasonló, kétváltozós homogén polinomok értékeire vonatkozó színezéses állítás segíthet az előző féléves eredmények általánosításában. Részben ezen állításról szól a beszámoló. Később az Erdős-Turán-tételt sikerült általánosítanunk tetszőleges több monomból álló kétváltozós homogén polinomra, a Thue-egyenleteknek egy (általunk bizonyított) színezéses változatával, mely eredményeket hamarosan publikálni szeretnénk témavezetőmmel.

Az előző félévben a következő tétel általánosításával foglalkoztam szintén egy halmazra és $f(a, b) = a+b$ helyett bizonyos szimmetrikus másodfokú és 1 főegyütthatós homogén kétváltozós polinomokra:

1. Tétel. (Erdős-Turán [1]) Ha A pozitív egész számok véges halmaza és $|A| = 3 \cdot 2^{k-1}$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$, akkor $\omega(\prod_{a,b \in A, a \neq b} (a+b)) \geq k+1$.

Az általánosításokban a prímosztók számára szintén $\log |A|$ -s nagyságrendű eredmény adódott.

Az Erdős-Turán-tétel előzménye az a témakört elindító, Grünwald és Lázár által igazolt (gyengébb) állítás volt, hogy ha végtelen sok pozitív egész számra minden lehetséges módon képezzük két különböző összegét, a kapott számoknak prímszám osztói közt végtelen sok különböző szám fordul elő [1]. Bizonyításuk Pólya egy eredményén keresztül áttételese a következő, Thue által igazolt, speciális homogén kétváltozós egész együtthatós polinomokra vonatkozó tételen múlt [2].

2. Tétel. (Thue [4]) Ha $f \in \mathbb{Z}[x, y]$ homogén, legalább harmadfokú irreducibilis polinom, akkor az $f(x, y) = m$ egyenletnek bármely $m \in \mathbb{Z}$ esetén véges sok egész megoldása van.

Az ilyen $f(x, y) = m$ típusú egyenleteket Thue-egyenleteknek nevezzük.

A 2. tétel bizonyítása azon múlik, hogy racionális számokkal mennyire (nem) lehet közelíteni irracionális algebrai számokat a nevező bizonyos hatványához viszonyítva. Ebben a tekintetben Roth tétele a legjobb:

3. Tétel. (Roth [3]) Ha α irracionális algebrai szám és $\kappa > 2$ valós szám, véges sok olyan $(p, q) = 1$ -et teljesítő (p, q) egész számpár létezik, amelyre $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\kappa}$.

2. Új eredmények

A félév során először a következő állítást igazoltuk:

4. Tétel. (Füredi E.-Gyarmati K.) Legyen $f \in \mathbb{R}[x, y]$ kétváltozós homogén polinom, amely nem $f(x, y) = c(x - y)$ alakú (ahol $c \in \mathbb{R}[x, y]$), f x -től és y -től is függ, és legyen $m \in \mathbb{R}$. Ekkor léteznek olyan csak f -től és m -től függő, hatékonyan kiszámolható $k(f)$ és $\ell(f)$ pozitív egész számok, hogy $\mathbb{R}$ felosztható $U_1, U_2, \dots, U_{k(f)}$ diszjunkt halmazok uniójára, hogy az

$$|f(x, y)| \leq m$$

egyenlőtlenség azon egész megoldásainak a száma, amelyre létezik $0 \neq r \in \mathbb{R}$ szám, amelyre rx és ry ugyanabba az U_i csoportba esik, kevesebb mint $\ell(f)$.

A 4. tétel bizonyítása:

Mivel $|f(x, y)| \geq 0$, feltehetjük, hogy $m \geq 0$, különben $k(f) = \ell(f) = 1$ megfelel. Legyen a polinom gyöktényezős alakja

$$f(x, y) = tx^k y^l \prod_{i=1}^s (x - \alpha_i y),$$

ahol k, l, s nemnegatív egész számok, $k + l + s = \deg f$ és $t \prod_{i=1}^s \alpha_i \neq 0$. Tudjuk, hogy a polinom nem x^k vagy y^l alakú. Az $|f(x, y)| \leq m$ feltétellel ekvivalens, hogy

$$|x^k y^l \prod_{i=1}^s (x - \alpha_i y)| \leq \frac{m}{|t|}.$$

I. eset: $\deg f = s$, tehát x és y sem osztja f -et

Vizsgáljuk az

$$\left| \prod_{i=1}^{\deg f} (x - \alpha_i y) \right| \leq \frac{m}{|t|}$$

egész (x, y) megoldásait. Mivel

$$\left| \prod_{i=1}^{\deg f} (x - \alpha_i y) \right| = \prod_{i=1}^{\deg f} |x - \alpha_i y|,$$

szükségszerűen van olyan $1 \leq i \leq \deg f = s$, amelyre

$$|x - \alpha_i y| \leq \left(\frac{m}{|t|}\right)^{1/\deg f}.$$

Minden α_i -hez készítjük $\mathbb{R}$ olyan diszjunkt halmazokra osztását, amelyre egy halmazon belül csak véges sok $|x - \alpha_i y| \leq \left(\frac{m}{|t|}\right)^{1/\deg f}$ -t kielégítő (x, y) egész számpárhoz létezik a halmazban lévő rx, ry valamely $0 \neq r \in \mathbb{R}$ esetén, majd ezután ezen felosztások egyesítéséből készítünk a feltételeket kielégítő halmazokat. Ha α_i nem valós szám, akkor ez $|\alpha_i y|$ képzetes részére és $|y|$ -ra ad egy felső korlátot,

$$|y| \leq \left(\frac{m}{|t|}\right)^{1/\deg f} / |Im(\alpha_i)|,$$

ami $|x|$ -re is felső korlátot ad, így ekkor csak véges sok ilyen (x, y) egész számpár van, amelyre $|x - \alpha_i y| \leq \left(\frac{m}{|t|}\right)^{1/\deg f}$. Ha $|x - \alpha_i y| \leq L$ egy L nemnegatív valós számra, akkor negatív α_i esetén azonos előjelű x és y számokra

$$|x| \leq |x - \alpha_i y| \leq L$$

és

$$|\alpha_i y| \leq |x - \alpha_i y| \leq L$$

miatt csak véges sok olyan (x, y) egész megoldása van az $|x - \alpha_i y| \leq L$ egyenlőtlenségnek, ahol $xy > 0$. Emiatt ha itt a valós számokat előjelük szerint (pozitív, negatív, nulla) három halmazba osztjuk, akkor egy halmazon belül véges sok $|x - \alpha_i y| \leq \left(\frac{m}{|t|}\right)^{1/\deg f}$ -t kielégítő (x, y) egész számpárhoz létezik a halmazban lévő rx, ry $r \neq 0$ valós számra.

Maradt azon eset, amikor $\alpha_i > 0$, akkor kis $(|x|, |y|)$ párokat leszámítva $|x|$ és $|y|$ aránya közel áll az $\alpha_i : 1$ arányhoz. Ugyanis legyen $\alpha_i > \varepsilon > 0$ valós szám, ekkor $|x| > (\alpha_i + \varepsilon)|y|$ esetén ha $|x - \alpha_i y| \leq L$ egy L nemnegatív valós számra, akkor

$$L \geq |x| - |\alpha_i y| > \varepsilon |y|$$

és

$$L \geq |x| - \left| \frac{\alpha_i x}{\alpha_i + \varepsilon} \right| > \frac{\varepsilon}{\alpha_i + \varepsilon} |x|$$

felső korlátokat ad $|y|$ -ra és $|x|$ -re. Amikor $|x| < (\alpha_i - \varepsilon)|y|$, ha $|x - \alpha_i y| \leq L$ egy L nemnegatív valós számra, akkor

$$L \geq |\alpha_i y| - |x| > \varepsilon |y|$$

és

$$L \geq \left| \frac{\alpha_i x}{\alpha_i - \varepsilon} \right| - |x| > \frac{\varepsilon}{(\alpha_i - \varepsilon)} |x|$$

ad felső korlátokat $|y|$ -ra és $|x|$ -re. Mindkét esetben bármely $0 < \varepsilon < \alpha_i$ esetén véges sok kivétellel $|x - \alpha_i y| \leq \left(\frac{m}{|t|}\right)^{1/\deg f}$ egész (x, y) megoldásaira

$$|x| \in ((\alpha_i - \varepsilon)|y|, (\alpha_i + \varepsilon)|y|).$$

Legyen

$$h = \max \left(\alpha_i, \frac{1}{\alpha_i} \right) > 1,$$

mert $\alpha_i \neq 1$. Az $\mathbb{R}$ $\alpha_i > 0$ szerinti felosztásánál kilenc részre osztunk, a 0 egy külön halmazba kerül, a pozitív és negatív valós számok pedig négy-négy másik halmazba. A pozitív valós számok alapján készített halmazok legyenek H_1, H_2, H_3 és H_4 .

$$H_i = \{u \in \mathbb{R}^{>0} : [2\log_h(u)] \equiv i \pmod{4}\}.$$

az $1 \leq i \leq 4$ esetben. Vagyis pl. H_4 -be $[1, h^{1/2})$ intervallum elemei és ezek h^{2m} -szeresei minden $m \in \mathbb{Z}$ -re, H_1 , H_2 és H_3 ezek $h^{1/2}$, h és $h^{3/2}$ -szereseit tartalmazzák. A negatív számokat lényegében ugyanígy osztjuk be, ha két pozitív szám egy halmazba kerül, negatív -1 -szereseik is és viszont. Ekkor egy halmazon belül két szám hányadosa nem eshet a $[h^{1/2}, h^{3/2}]$ intervallumba, így a kilenc halmaz bármelyikére csak véges sok (x, y) egész számpárra lehet $|x - \alpha_i y| \leq (\frac{m}{|t|})^{1/\deg f}$ mellett rx és ry is a halmaz eleme $r \neq 0$ valós számra.

Eszerint ha a $\deg f$ különböző indexű α_i mindegyikére vesszük $\mathbb{R}$ felbontását és ezeket egyesítjük (azon valós számok kerülnek egy halmazba, amelyek mindegyik felbontásban egy halmazban vannak), $\mathbb{R}$ -t véges sok részre osztottuk úgy, hogy egy részen belül csak véges sok (x, y) egész számpárra létezik olyan $1 \leq i \leq \deg f$ és $0 \neq r \in \mathbb{R}$, amelyre $|x - \alpha_i y| \leq (\frac{m}{|t|})^{1/\deg f}$ és rx és ry is eleme a halmaznak. Így egy részen belül csak véges sok (x, y) egész számpárra lehet $|f(x, y)| \leq m$ mellett rx és ry eleme is a halmaznak valamely $0 \neq r$ valós számra. Van véges $k(f)$, míg $\ell(f)$ a $k(f)$ diszjunkt U_i halmazra előforduló számok, rendre

$$|\{(x, y) : \mathbb{Z}^2 : |f(x, y)| \leq m, \exists 0 \neq r \in \mathbb{R}, rx \in U_i, ry \in U_i\}|$$

mindegyikénél nagyobbak választható. Ezzel az állítást olyan f polinomokra, amelyet x és y sem oszt, beláttuk.

II. eset: $\deg f > s$, de $s > 0$.

Ekkor az

$$\left| x^k y^l \prod_{i=1}^s (x - \alpha_i y) \right| \leq \frac{m}{|t|}$$

egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet, ha

$$|x| \leq \frac{1}{2},$$

$$|y| \leq \frac{1}{2},$$

vagy

$$|x - \alpha_i y| \leq \left(\frac{2^{(\deg f) - s} m}{|t|} \right)^{1/s}$$

valamely $1 \leq i \leq s$ esetén. Utóbbinál minden α_i -re az előző részhez hasonlóan készítjük $\mathbb{R}$ olyan felosztását véges sok részre, ahol részenként csak véges sok (x, y) $|x - \alpha_i y| \leq (\frac{2^{(\deg f) - s} m}{|t|})^{1/s}$ -t teljesítő egész számpárra eleme rx és ry is a résznek, csak a felső korlát változott. Ha a 0 egy külön halmazt alkot $\mathbb{R}$ felosztásában, például $\mathbb{R}$ -et két részre osztva, $|x| \leq \frac{1}{2}$ és $|y| \leq \frac{1}{2}$ esetén sem lehet ennek (x, y) egész számpárra eleme rx és ry is egy résznek $r \neq 0$ -ra a $(0, 0)$ esetet kivéve, másként az egész számpár pontosan egyik száma 0 . Ezért ezen esetben a 0 -t és a többi valós számot egy-egy halmazba osztjuk. A felosztásainkat egyesítve a kapott véges sok halmaz mindegyikére csak véges sok (x, y) egész számpár van, amelyre valamely $r \neq 0$ valós számra rx és ry is a halmaz eleme, és $|x| \leq \frac{1}{2}$, $|y| \leq \frac{1}{2}$, vagy $|x - \alpha_i y| \leq (\frac{2^{(\deg f) - s} m}{|t|})^{1/s}$ valamely $1 \leq i \leq s$ esetén. Mivel ezek közül legalább egy szükséges az $|f(x, y)| \leq m$ egyenlőtlenséghez, a tételt ezen esetre is bizonyítottuk.

III. eset: $f(x, y) = tx^k y^l$ alakú ($k, l > 0$)

Ekkor

$$|f(x, y)| \leq m$$

megoldásai

$$|x^k y^l| \leq \frac{m}{|t|}$$

megoldásai. Legyen a két halmazunk a 0 és a többi valós szám. $r \neq 0$ miatt az olyan (x, y) egész megoldások, ahol $xy = 0$ és rx és ry egy halmazba esik, csak a $(0, 0)$. Ezen felül $xy \neq 0$ -ra

$$|x^k y^l| \leq \frac{m}{|t|}$$

alapján

$$\max(|x|, |y|) \leq \frac{m}{|t|},$$

így csak véges sok további egész megoldása van $|f(x, y)| \leq m$ -nek, már ez a két halmazra osztás is elegendő a tétel állításához. A 4. tételt bebizonyítottuk. ■

Egy részben hasonló bizonyítási módszerrel sikerült az Erdős-Turán-tételhez és előző félèves eredményeimhez hasonlóan $\log |\mathcal{A}|$ -ban lineáris, $\log |\mathcal{A}|$ -t pozitív szorzóval tartalmazó alsó becslést adni $f \in \mathbb{Z}[x, y]$ homogén polinomok esetén $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (f(a, b)))$ értékére. Igazából arra van szükség, hogy a tagok száma egynél több legyen, esetlegesen x - és y -hatvánnyal leosztva a tételben tárgyalt alakhoz juthatunk. A 4. és 5. tételek bizonyításainak hasonló ötlete, hogy amennyiben a gyöktényezős alakban az $|x - \alpha_i y|$ alakú számok szorzata kicsi, valamelyik i -re $|x - \alpha_i y|$ is az.

5. Tétel. (Füredi E.-Gyarmati K.) Legyen $f(x, y) = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} y + \dots + r_0 y^n \in \mathbb{Z}[x, y]$ homogén kétváltozós egész együtthatós polinom, melynek foka az n pozitív egész szám és $r_n r_0 \neq 0$. Ekkor létezik olyan az f -től függő hatékonyan kiszámolható $c(f) > 0$ konstans, amelyre ha $\mathcal{A}$ pozitív egész számok véges halmaza amelyre $|\mathcal{A}| \geq c(f)(2n+1)^k + 1$, akkor

$$\omega\left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (f(a, b))\right) \geq k+1.$$

A bizonyítás a halmaz szűkítésével kezdődik és a gráfelméleti tételek használatával végződik.

Az 5. tétel bizonyítása:

Feltehető, hogy $f(1, 1) \neq 0$ tehát $x - y \nmid f(x, y)$, különben $\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (f(a, b))$ -t osztják a legkisebb prímelek, $\frac{|\mathcal{A}|}{\log |\mathcal{A}|}$ -s nagyságrendben.

Egy p prím szokásos, ha $p \nmid r_n r_0 f(1, 1)$, míg egy p prím különleges, ha $p \mid r_n r_0 f(1, 1)$. Véges sok kivétellel a prímszámok szokásosak. A tervünk $\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (f(a, b))$ szokásos prímosztóinak számát megbecsülni az öt tényezőnként osztó $\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (f(\frac{a}{\text{luko}(a, b)}, \frac{b}{\text{luko}(a, b)}))$ szokásos prímosztóinak számával (ez közös vonás az Erdős-Turán-tétel bizonyításával). Jelölje $v_p(m)$ bármely $m \neq 0$ egész számra és p prímszámra p kitevőjét m prímtenyezős felbontásában. Bármely p szokásos prímszámra ha $a, b \in \mathbb{Z}$ mellett $p \mid f(\frac{a}{\text{luko}(a, b)}, \frac{b}{\text{luko}(a, b)})$, akkor $v_p(a) = v_p(b)$ és $\frac{a}{p^{v_p(a)}} \not\equiv \frac{b}{p^{v_p(b)}} \pmod{p}$, mindkettő a szokásosság következménye $p \nmid r_n r_0$ és $p \nmid$

$f(1, 1)$ miatt. Adott a és b mellett $v_p(a) = v_p(b)$ esetén $f\left(\frac{a}{\text{luko}(a, b)}, \frac{b}{\text{luko}(a, b)}\right) \equiv 0 \pmod{p}$ pontosan akkor, ha $f\left(\frac{a}{p^{v_p(a)}}, \frac{b}{p^{v_p(b)}}\right) = f\left(\frac{a}{p^{v_p(a)}}, \frac{b}{p^{v_p(a)}}\right) \equiv 0 \pmod{p}$, ugyanazon mod p nem nulla számmal, $\left(\frac{\text{luko}(a, b)}{p^{v_p(a)}}\right)^n$ -nel osztódik a polinomot összegként felírva minden tag. Emiatt adott a pozitív egész szám mellett $f\left(\frac{a}{\text{luko}(a, b)}, \frac{b}{\text{luko}(a, b)}\right) \equiv 0 \pmod{p}$ elkerüléséhez az olyan b -ket kell elkerülni, amelyekre $v_p(b) = v_p(a)$ és $f\left(\frac{a}{p^{v_p(a)}}, \frac{b}{p^{v_p(a)}}\right) \equiv 0 \pmod{p}$, itt $\frac{b}{p^{v_p(b)}} \pmod{p}$ (redukált) maradékosztálya $r_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ miatt a fokszámtételből legfeljebb $\deg f = n$ -féle lehet. Ha adott a pozitív egész számra $f\left(\frac{b}{\text{luko}(a, b)}, \frac{a}{\text{luko}(a, b)}\right) \equiv 0 \pmod{p}$ -t is kizárjuk, az olyan b -ket kell elkerülni, amelyekre $v_p(b) = v_p(a)$ és $f\left(\frac{b}{p^{v_p(a)}}, \frac{a}{p^{v_p(a)}}\right) \equiv 0 \pmod{p}$, itt $\frac{b}{p^{v_p(b)}} \pmod{p}$ (redukált) maradékosztálya $r_n \not\equiv 0 \pmod{p}$ miatt legfeljebb a fokszámtételből legfeljebb $\deg f = n$ -féle lehet. Már láttuk, hogy ez utóbbi mod p redukált maradékosztályok az a -étól, $\frac{a}{p^{v_p(a)}}$ -tól térnek el. Emiatt minden a pozitív egész számra mod p $2n$ darab másik redukált maradékosztályt kell elkerülnie a többi b elemre $\frac{b}{p^{v_p(b)}}$ -nek, ez a mod p redukált maradékosztályok szerint legfeljebb $2n + 1$ halmazra szétosztással kezelhető. Így ha van egy H halmazunk pozitív egész számokból, bármely p szokásos prímszámra létezik olyan $H_1 \subset H$, amelyre $|H_1| \geq \frac{|H|}{2n + 1}$ és

$$p \nmid \prod_{a, b \in H_0, a \neq b} \left(f\left(\frac{a}{\text{luko}(a, b)}, \frac{b}{\text{luko}(a, b)}\right)\right).$$

Ha adott egy p különleges prím és pozitív egész számok egy véges J halmaza, akkor J minden x elemét írjuk fel $p^{v_p(x)}u(x)$ alakban, ahol $p \nmid u(x)$ egész szám. Az elemeket csoportosítsuk $v_p(x)$ modulo $\max(v_p(r_n), v_p(r_0)) + 1$ maradékosztálya és $u(x)$ modulo $p^{v_p(f(1, 1))}$ (redukált) maradékosztálya szerint. $x, y \in J$ pontosan akkor kerül a csoportosításban ugyanoda, ha

$$v_p(x) \equiv v_p(y) \pmod{(\max(v_p(r_n), v_p(r_0)) + 1)}$$

és

$$u(x) \equiv u(y) \pmod{p^{v_p(f(1, 1)) + 1}}.$$

Ilyen módon nem több mint $p^{v_p(r_n r_0 f(1, 1)) + 2}$ részbe particionáltuk J -t. Ugyanezt az összes p különleges prímre elvégezve azon számokat egy-egy halmazba téve, ahol minden prím szerinti particionálásban ugyanoda kerültek a számok, nem több mint

$$\prod_{p \mid r_n r_0 f(1, 1)} p^{v_p(r_n r_0 f(1, 1)) + 2} \leq (r_n r_0 f(1, 1))^3$$

részbe particionáljuk J -t. A particionálásban kapott (egyik) legnagyobb halmaz legyen J_0 , $|J_0| \geq \frac{|J|}{(r_n r_0 f(1, 1))^3}$.

Vizsgáljuk meg, hogy $a, b \in J_0, a \neq b$ esetén mi lehet $v_p\left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)\right)$. Ha $v_p(a) = v_p(b)$, akkor mivel $u(a) \equiv u(b) \pmod{p^{v_p(f(1,1))+1}}$,

$$\frac{a}{\text{Inko}(a, b)} \equiv \frac{b}{\text{Inko}(a, b)} \not\equiv 0 \pmod{p^{v_p(f(1,1))+1}},$$

így

$$f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right) \equiv f(1, 1) \cdot \left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}\right)^n \pmod{p^{v_p(f(1,1))+1}},$$

ezért $p^{v_p(f(1,1))} \mid f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)$, de $p^{v_p(f(1,1))+1} \nmid f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)$. Vagyis ekkor

$$v_p\left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)\right) = v_p(f(1, 1)).$$

Ha $v_p(a) > v_p(b)$, akkor $v_p(a) > v_p(b) + v_p(r_0)$ és $v_p\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}\right) > v_p\left(\frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right) + v_p(r_0)$, így

$$v_p\left(r_0\left(\frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)^n\right) < v_p\left(r_{n-i}\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}\right)^{n-i}\left(\frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)^i\right)$$

minden $0 \leq i < n$ egész számra. Emiatt

$$v_p\left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)\right) = v_p\left(r_0\left(\frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)^n\right) = v_p(r_0),$$

mert $p \nmid \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}$.

Végül ha $v_p(a) < v_p(b)$, akkor $v_p(b) > v_p(a) + v_p(r_n)$ következményeként

$$v_p\left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)\right) = v_p(r_n)$$

adódik. Ezzel beláttuk, hogy bármely p különleges prímszámra bármely $a, b \in J_0, a \neq b$ esetén $v_p\left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)\right)$ a $v_p(f(1, 1))$, $v_p(r_0)$ és $v_p(r_n)$ értékek valamelyike.

Legyen pozitív egész számok (a tétel állításában szereplő) véges halmaza $\mathcal{A}$ és erre alkalmazzuk a J -re leírt lépéseket, így kapunk egy $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ halmazt, amelyre $|\mathcal{A}_0| \geq \frac{|\mathcal{A}|}{(r_n r_0 f(1, 1))^3}$

és bármely p különleges prímszámra, $a, b \in \mathcal{A}_0, a \neq b$ esetén $v_p\left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)\right)$ a $v_p(f(1, 1))$, $v_p(r_0)$ és $v_p(r_n)$ értékek valamelyike. Tudjuk, hogy $\prod_{a, b \in \mathcal{A}, a \neq b} (f(a, b))$ prímosztóinak

részhalmaza $\prod_{a, b \in \mathcal{A}_0, a \neq b} \left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)\right)$ szokásos prímosztóinak halmaza. Legyenek utóbbiak $q_1, q_2, \dots, q_s$. Ekkor a szokásos prímosztókra bizonyított eredményből léteznek

olyan $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_{s-1} \subset \mathcal{A}_{s-2} \subset \dots \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0$ halmazok, amelyekre $|\mathcal{A}_i| \geq \frac{|\mathcal{A}_0|}{(2n+1)^i}$ és

a $q_1, q_2, \dots, q_i$ prímek egyike sem osztja a $\prod_{a, b \in \mathcal{A}_i, a \neq b} \left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a, b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a, b)}\right)\right)$ szorzatot. Mindig az előző halmazból képezünk újat a q_i prímszámra tekintettel, $\mathcal{A}_{i-1}$ -et legfeljebb

$2n + 1$ különböző halmazba particionálva választjuk az egyik legnagyobbat $\mathcal{A}_i$ -nek. Ekkor az utolsóként kapott $\mathcal{A}_s$ halmazra $\prod_{a,b \in \mathcal{A}_s, a \neq b} \left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a,b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a,b)}\right) \right)$ összes prímosztója a különleges prímek közül kerül ki. Ha az ilyen $\mathcal{A}_s$ -ként elképzelhető pozitív egész számokból álló $\mathcal{B}$ halmazra, amelyre $\prod_{a,b \in \mathcal{B}, a \neq b} \left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a,b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a,b)}\right) \right)$ összes prímosztója különleges, sőt, bármely ilyen p prím kitevője az $f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a,b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a,b)}\right)$ helyettesítési érték prímtenyezős felbontásában $v_p(r_n)$, $v_p(r_0)$ vagy $v_p(f(1,1))$, így legfeljebb $2 \cdot 3^{\omega(r_n r_0 f(1,1))}$ -féle lehet, létezik véges K felső korlát $|\mathcal{B}|$ -re, készen vagyunk, mert ekkor

$$K(2n+1)^s (r_n r_0 f(1,1))^3 + 1$$

méretű $\mathcal{A}$ halmazra a szokásos prímosztók száma legalább $s+1$, amiből $c(f) = K(r_n r_0 f(1,1))^3$ megfelel.

Bebizonyítjuk, hogy létezik olyan f -től függő K pozitív egész szám, amelyre nincs K -nál nagyobb méretű $\mathcal{B}$ halmaz, melynek $\prod_{a,b \in \mathcal{B}, a \neq b} \left(f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a,b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a,b)}\right) \right)$ összes prímosztója különleges, $r_n r_0 f(1,1)$ -et is osztja, és minden p különleges prímszámra bármely $a, b \in \mathcal{B}, a \neq b$ esetén az $f\left(\frac{a}{\text{Inko}(a,b)}, \frac{b}{\text{Inko}(a,b)}\right)$ számban p kitevője $v_p(r_n)$, $v_p(r_0)$ vagy $v_p(f(1,1))$. Írjuk fel f -et egész együtthatós irreducibilis polinomok szorzataként, ezek homogén kétváltozós polinomok, helyettesítési értékeik $r_n r_0 f(1,1)$ osztói, véges sok lehetőség van rájuk.

Ha az f -et egész együtthatós irreducibilis polinomok szorzataként felírva kapott tényezők között létezik elsőfokú, akkor az $Ax + By$ alakú, ahol $A, B \in \mathbb{Z}$ és A, B és 0 három különböző szám. Itt

$$\frac{Ax + By}{\text{Inko}(x,y)} \mid f\left(\frac{x}{\text{Inko}(x,y)}, \frac{y}{\text{Inko}(x,y)}\right)$$

minden $x, y \in \mathcal{B}, x \neq y$ esetén. Tudjuk, hogy $\frac{x}{\text{Inko}(x,y)} > 0$ és $\frac{y}{\text{Inko}(x,y)} > 0$. Ha A és B előjele megegyezik, bármely $d \mid r_n r_0 f(1,1)$ esetén $Ak + Bl = d$ csak véges sok $k > 0, l > 0$ egész számpárra lehetséges, ekkor az $\left(\frac{x}{\text{Inko}(x,y)}, \frac{y}{\text{Inko}(x,y)}\right)$ számpár összességében véges sokféle lehet, $x, y \in \mathcal{B}, x \neq y$ esetén, $|\mathcal{B}|$ -re az 1-gyel nagyobb pozitív egész szám felső korlát. Ha A és B előjele eltér, ekkor bármely $d \mid r_n r_0 f(1,1)$ esetén $Ax + By = d$ -nek véges sok olyan megoldása van, ahol

$$\frac{x}{y} = \left| \frac{x}{y} \right| \notin \left(\min \left(\left| \frac{B}{A} \right|^{2/3}, \left| \frac{B}{A} \right|^{4/3} \right), \max \left(\left| \frac{B}{A} \right|^{2/3}, \left| \frac{B}{A} \right|^{4/3} \right) \right),$$

nagy x, y -okra $Ax \approx -By$. Bármely $\varepsilon > 0$ -ra ha $(y \neq 0$ mellett) $\left| \frac{x}{y} \right| - \left| \frac{B}{A} \right| > \varepsilon$, akkor

$$|d| = |Ax + By| \geq ||Ax| - |By|| > \varepsilon |Ay|,$$

így $|y|$ -ra véges felső korlát adódik, ami végeessé teszi a megoldások számát. Tudjuk, hogy $\left| \frac{B}{A} \right| \neq 1$, mert $x - y \nmid f(x, y)$. Legyen M az $Ax + By \mid r_n r_0 f(1,1)$ olyan egész megoldásainak száma, ahol

$$\left| \frac{x}{y} \right| \notin \left(\min \left(\left| \frac{B}{A} \right|^{2/3}, \left| \frac{B}{A} \right|^{4/3} \right), \max \left(\left| \frac{B}{A} \right|^{2/3}, \left| \frac{B}{A} \right|^{4/3} \right) \right).$$

Ha tekintjük a $\mathcal{B}$ halmaz elemeinek $x_1 < x_2 < \dots < x_{|\mathcal{B}|}$ sorrendjét, akkor nincs olyan $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq |\mathcal{B}|$ trió, ahol $\left| \frac{x_{i_1}}{x_{i_2}} \right|, \left| \frac{x_{i_1}}{x_{i_3}} \right|$ és $\left| \frac{x_{i_2}}{x_{i_3}} \right|$ is a $\left(\min \left(\left| \frac{B}{A} \right|^{2/3}, \left| \frac{B}{A} \right|^{4/3} \right), \max \left(\left| \frac{B}{A} \right|^{2/3}, \left| \frac{B}{A} \right|^{4/3} \right) \right)$ intervallum eleme. Emiatt bármely $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ trióra van köztük olyan x_u, x_v pár ($u < v$), amelyre $\left(\frac{x_u}{\text{Inko}(x_u, x_v)}, \frac{x_v}{\text{Inko}(x_u, x_v)} \right)$ az M megoldás valamelyike. Ha készítünk egy gráfot ahol a $\mathcal{B}$ halmaz elemei a csúcsok és az x_i, x_j csúcsok közt ($i < j$) akkor megy él, ha $\left(\frac{x_i}{\text{Inko}(x_i, x_j)}, \frac{x_j}{\text{Inko}(x_i, x_j)} \right)$ az M megoldás valamelyike, mivel a komplementerben nincs háromszög, a Turán-tétellel az élek száma legalább $\frac{|\mathcal{B}|}{2} \left(\frac{|\mathcal{B}|}{2} - 1 \right)$, van legalább $\left(\frac{|\mathcal{B}|}{2} - 1 \right)$ -fokú csúcs, de minden csúcs foka legfeljebb $2M$ (nem létezhet M -nél több nagyobb vagy M -nél több kisebb indexű, vele szomszédos csúcs), így $|\mathcal{B}| \leq 4M + 2$. Ezzel beláttuk, hogy $|\mathcal{B}|$ -re ekkor létezik véges felső korlát.

Felírva az f polinomot irreducibilis egész együtthatós polinomok szorzataként, a(z egyik) legkisebb fokú nem konstans tényező legyen a t -edfokú $h_1(x, y)$, ahol $0 < t \leq n$. Nézzük azon megmaradt esetet, amikor $t \geq 2$. Bármely $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén $h_1(x, y) \mid r_n r_0 f(1, 1)$. Ekkor

$$(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \dots (x - \alpha_t y)$$

alakban felírható a $h_1(x, y)$ -t x^t együtthatójával leosztva adódó polinom, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in \mathbb{C}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ különbözőek és $(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \dots (x - \alpha_t y)$ abban az esetben, ha $h_1(x, y) \mid r_n r_0 f(1, 1)$, véges sokféle nemnulla racionális szám lehet. Bármely ilyen d_0 lehetséges értékre van olyan $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, amelyre $|x - \alpha_i y| \leq \sqrt[t]{|d_0|}$. Ha valamelyik α_i nem valós szám, akkor $|x - \alpha_i y| \leq \sqrt[t]{|d_0|}$ esetén a képzetes rész abszolútértékére fennáll $|\text{Im}(\alpha_i y)| \leq \sqrt[t]{|d_0|}$ felső becslésből y -ra véges sok eset és összesen is véges sok eset adódik, adott y mellett $(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \dots (x - \alpha_t y) = d_0$ legfeljebb t darab x -re lehet. Ekkor az (x, y) pozitív egész számpárok száma összesen is véges sokféle lehet $h_1(x, y) \mid r_n r_0 f(1, 1)$ esetén, készen vagyunk (mert adott $x_i \in \mathcal{B}$ mellett más $x_j \in \mathcal{B}$ számokra $\left(\frac{x_i}{\text{Inko}(x_i, x_j)}, \frac{x_j}{\text{Inko}(x_i, x_j)} \right)$ és vele x_j is véges sokféle lehet).

Ha az összes α_i valós szám, az irreducibilitás miatt $|\alpha_i| \neq 1$ bármely $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ esetén. Véges sok, m_i eset kivételével $|x - \alpha_i y| \leq \sqrt[t]{|d_0|}$ esetén

$$\frac{x}{y} = \left| \frac{x}{y} \right| \in \left(\min \left(\left| \alpha_i \right|^{2/3}, \left| \alpha_i \right|^{4/3} \right), \max \left(\left| \alpha_i \right|^{2/3}, \left| \alpha_i \right|^{4/3} \right) \right),$$

ahogy az elsőfokú tényezőről szóló előző esetben is láttuk. A $\mathcal{B}$ halmaz elemei legyenek $x_1 < x_2 < \dots < x_{|\mathcal{B}|}$. Készítünk egy gráfot, ahol a csúcsok $\mathcal{B}$ elemeit jelképezik, emellett t különböző színnel kiszínezzük az éleit. $I < J$ esetén x_I és x_J közt i . színű él van, ha

$$\left| \frac{x_I}{\text{Inko}(x_I, x_J)} - \alpha_i \frac{x_J}{\text{Inko}(x_I, x_J)} \right| \leq \left(\left| \left(\frac{x_I}{\text{Inko}(x_I, x_J)} - \alpha_1 \frac{x_J}{\text{Inko}(x_I, x_J)} \right) \left(\frac{x_I}{\text{Inko}(x_I, x_J)} - \alpha_2 \frac{x_J}{\text{Inko}(x_I, x_J)} \right) \dots \left(\frac{x_I}{\text{Inko}(x_I, x_J)} - \alpha_t \frac{x_J}{\text{Inko}(x_I, x_J)} \right) \right| \right)^{1/t},$$

és az i a legkisebb ilyen sorszám. Ha van akármilyen nagy véges $\mathcal{B}$ halmaz, akkor van akármilyen nagy egyszínű részgráf is a hozzá készített gráfban a t színnel színezett gráfokra vonatkozó Ramsey-tételből. Feltehetjük, hogy ez a részgráf az 1. színnel van színezve. Vagyis ekkor bármely l pozitív egész számra vannak olyan $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_l}$ pozitív egész számok ahol

bármely $j_1 < j_2, j_1, j_2 \in \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ indexekre

$$\left| \frac{x_{j_1}}{\text{Inko}(x_{j_1}, x_{j_2})} - \alpha_1 \frac{x_{j_2}}{\text{Inko}(x_{j_1}, x_{j_2})} \right| \leq \left(\left| \frac{x_{j_1}}{\text{Inko}(x_{j_1}, x_{j_2})} - \alpha_1 \frac{x_{j_2}}{\text{Inko}(x_{j_1}, x_{j_2})} \right| \left(\frac{x_{j_1}}{\text{Inko}(x_{j_1}, x_{j_2})} - \alpha_2 \frac{x_{j_2}}{\text{Inko}(x_{j_1}, x_{j_2})} \right) \dots \left(\frac{x_{j_1}}{\text{Inko}(x_{j_1}, x_{j_2})} - \alpha_t \frac{x_{j_2}}{\text{Inko}(x_{j_1}, x_{j_2})} \right) \right)^{1/t}.$$

Az (x, y) egész számpárokra ahol

$$|x - \alpha_1 y| \leq \sqrt[t]{d_0}$$

és

$$(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \dots (x - \alpha_t y) = d_0,$$

m_1 eset kivételével

$$\left| \frac{x}{y} \right| \in \left(\left(\min \left(\left| \alpha_1 \right|^{2/3}, \left| \alpha_1 \right|^{4/3} \right), \max \left(\left| \alpha_1 \right|^{2/3}, \left| \alpha_1 \right|^{4/3} \right) \right).$$

Ugyanakkor nem lehet olyan (x_I, x_J, x_K) hármas az $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_l}$ pozitív egész számokra, ahol ez fennáll $(x, y) = \left(\frac{x_I}{\text{Inko}(x_I, x_J)}, \frac{x_J}{\text{Inko}(x_I, x_J)} \right), (x, y) = \left(\frac{x_I}{\text{Inko}(x_I, x_K)}, \frac{x_K}{\text{Inko}(x_I, x_K)} \right)$ és $(x, y) = \left(\frac{x_J}{\text{Inko}(x_J, x_K)}, \frac{x_K}{\text{Inko}(x_J, x_K)} \right)$ esetén is. Ebből az elsőfokú esethez hasonlóan a Turán-tételt alkalmazva megkapjuk, hogy $l \leq 2m_1 + 2$, hiszen ha gráfot készítünk $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}$ csúcsokkal, ahol két csúcsot (x, y) , utóbbi a nagyobb számhoz tartozó) közt akkor megy él, ha

$$\left| \frac{x}{y} \right| \notin \left(\left(\min \left(\left| \alpha_1 \right|^{2/3}, \left| \alpha_1 \right|^{4/3} \right), \max \left(\left| \alpha_1 \right|^{2/3}, \left| \alpha_1 \right|^{4/3} \right) \right),$$

az élek száma legalább $\frac{l(l-2)}{4}$, van legalább $\frac{l}{2} - 1$ fokú csúcs, de minden fok legfeljebb $2m_1$.

Így l nem lehet akármilyen nagy pozitív egész szám. Ezzel készen vagyunk azon esetre is, amikor $f(x, y)$ -t nem osztja egész együttthatós elsőfokú polinom.

A bizonyítás alapján $c(f)$ hatékonyan kiszámolható. Ebből a tétel állítása következik. Az 5. tételt bebizonyítottuk. ■

Hivatkozások

- [1] P. Erdős és P. Turán: On a problem in the elementary theory of numbers, *American Mathematical Monthly* 41, 608-611, 1934
- [2] G. Pólya: Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome, *Mathematische Zeitschrift* 1, 143-148, 1918
- [3] K. Roth: Rational approximation to algebraic numbers, *Mathematika* 2 168, 1-20, 1955
- [4] A. Thue: Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 135, 284-305, 1909