

Thue-egyenletek és valós számok

Füredi Erik

Témavezető: Gyarmati Katalin

Egyéni kutatómunka 2 beszámoló, 2025. június 6.

Definíció (Thue-egyenlet)

Thue-egyenletnek nevezzük az $f(x, y) = m$ alakú egyenletet, ahol $f \in \mathbb{Z}[x, y]$ homogén polinom, $m \in \mathbb{Z}$, $\deg f \geq 3$ és f irreducibilis.

Tétel (Thue)

Minden Thue-egyenletnek véges sok $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása van.

Tétel (Füredi E., Gyarmati K.)

Legyen $f \in \mathbb{R}[x, y]$ kétváltozós homogén polinom, amely nem $f(x, y) = c(x - y)$ alakú (ahol $c \in \mathbb{R}[x, y]$), f x -től és y -tól is függ, és legyen $m \in \mathbb{R}$. Ekkor léteznek olyan csak f -től és m -től függő, hatékonyan kiszámolható $k(f)$ és $\ell(f)$ pozitív egész számok, hogy $\mathbb{R}$ felosztható $U_1, U_2, \dots, U_{k(f)}$ diszjunkt halmazok uniójára, hogy az

$$|f(x, y)| \leq m$$

egyenlőtlenség azon egész megoldásainak a száma, amelyre létezik $0 \neq r \in \mathbb{R}$ szám, amelyre rx és ry ugyanabba az U_i csoportba esik, kevesebb mint $\ell(f)$.

- A pozitív egész számok véges halmaza
- f homogén kétváltozós, egész együtthatós polinom
- cél: $\omega(\prod_{a,b \in A, a \neq b} f(a, b))$ becslése
- $|A|$ és f függvényében

Tétel (Erdős, Turán)

Ha pozitív egész számok A halmazára $|A| = 3 \cdot 2^{k-1}$ (k pozitív egész szám), akkor $\omega(\prod_{a,b \in A, a \neq b} (a+b)) \geq k+1$.

- $|A| = 2^k + 1$ -re is fennáll
- Egyéni kutatómunka 1: $\log |A|$ -s nagyságrendű alsó becslések (a prímosztók számára) más polinomokra
- pl. $f(a, b) = xa^2 + yab + xb^2$, ahol $x > 0$ és $2x + y > 0$

Tétel (Füredi E., Gyarmati K.)

Legyen $f(x, y) = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + r_0 y^n \in \mathbb{Z}[x, y]$ homogén kétváltozós egész együtthatós polinom, melynek foka az n pozitív egész szám és $r_n r_0 \neq 0$. Ekkor létezik olyan az f -től függő hatékonyan kiszámolható $c(f) > 0$ konstans, amelyre ha $\mathcal{A}$ pozitív egész számok véges halmaza amelyre $|\mathcal{A}| \geq c(f)(2n+1)^k + 1$, akkor

$$\omega\left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (f(a, b))\right) \geq k+1.$$

A tétel vázlatos bizonyítása 1.

- szokásos és különleges prímek: $f(1,0)f(0,1)f(1,1)$ -et osztják-e
- cél: $\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f\left(\frac{a}{\text{luko}(a,b)}, \frac{b}{\text{luko}(a,b)}\right)$ -nek sok szokásos prímosztója van
- halmazt szűkítjük, marad $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$: $a, b \in \mathcal{A}_0$ -kra ($a \neq b$ esetén) $f\left(\frac{a}{\text{luko}(a,b)}, \frac{b}{\text{luko}(a,b)}\right)$ lehetséges értéke speciális
- minden $p \mid r_n a^n + r_{n-1} a^{n-1} b + \dots + r_0 b^n$ prímre halmaz elemeit $p^s t$ alakban felírjuk
- csoportosítás s és t szerint
- $|\mathcal{A}|/|\mathcal{A}_0|$ becsülhető f függvényében

A tétel vázlatos bizonyítása 2.

- $a, b \in \mathcal{A}_0$ -kra ($a \neq b$ esetén) $f(\frac{a}{\text{luko}(a,b)}, \frac{b}{\text{luko}(a,b)})$ -k véges sok értéket vehetnek fel
- $(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \dots (x - \alpha_n y) = C$
- ekkor a és b aránya ($a < b, a, b \in \mathcal{A}_0$) véges esetet kivéve véges sokféle r -hez közeli, ahol $|r| \neq 1$ (ha ...)
- nincs $a < b < c$ ($a, b, c \in \mathcal{A}_0$), ahol mindhárom párra ugyanolyan r -hez közeli az arány
- befejezés: Ramsey-tétel+Turán-tétel

- P. Erdős és J. Surányi: Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon kiadó, 3. kiadás (2004)
- P. Erdős és P. Turán: On a problem in the elementary theory of numbers,
Amer. Math. Monthly 41, 608-611 (1934)
- A. Thue: Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen,
Journal für die reine und angewandte Mathematik 135, 284-305, 1909

- Köszönöm a figyelmet!