

$SL(n)$ invariáns értékelések

Dorogi Imre László

Témavezető:

DR. BÖRÖCZKY KÁROLY

1. Bevezetés

Az előző kutatómunkámban [1] az izometria invariáns, folytonos értékelésekkel foglalkoztam. Ezeket Hadwiger karakterizálta [2] 1960 körül, ezután a figyelem más csoporthatások felé fordult. Ebben a dolgozatban az $SL(n)$ és eltolás (azaz $SA(n)$, speciális affin csoport) invariáns és ekvivariáns értékelésekkel fogok foglalkozni. Ezekre gyűjtök össze a Hadwigeréhez hasonló karakterizációs tételeket. A kutatómunkámban leginkább Monika Ludwig eredményeit használom fel [3].

1.1. Definíció (Értékelés). Legyen $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ az $\mathbb{R}^n$ -beli kompakt, konvex halmazok tere. $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ értékelés, ha $\forall A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ -re igaz, hogy, amennyiben $A \cup B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, akkor $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$. Az értékelés képhalmaza lehet $\mathbb{R}^m$ sőt bármilyen félcsoport (ha nincs kivonás definiálva, akkor a másik oldalhoz adjuk hozzá a metszet értékét).

1.2. Definíció (Hausdorff-metrika). Adott $K, L \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ és K_r , illetve L_r ezek r sugarú parallel tartományai, azaz K_r a K -tól legfeljebb $r \geq 0$ távolságra lévő pontok halmaza. Ekkor $d_H(K, L) = \inf\{r \geq 0 \mid K \subseteq L_r \wedge L \subseteq K_r\}$. Ez metrika és $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n); d_H)$ teljes metrikus tér. A folytonosságot és a kompakt, konvex halmazok konvergenciáját mindig ebben a metrikában értjük.

Ha $i = 0, \dots, n$ és $K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, akkor $V_i(K)$ az úgynevezett i -dik belső térfogat, ahol $V_n(K)$ a K térfogata (Lebesgue mértéke), $V_{n-1}(K)$ a K felszínének a fele, és $V_0(K) = 1$.

1.3. Tétel (Hadwiger-tétel). [2]

Adott $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre $f(\emptyset) = 0$, és teljesíti az alábbiakat

1. f értékelés, azaz, ha $A, B, A \cup B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, akkor

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B);$$

2. f folytonos a Hausdorff-metrika szerint;

3. f egybevágóság invariáns;

Ekkor f előáll belső térfogatok lineáris kombinációjaként, tehát léteznek olyan $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy

$$f(K) = \sum_i^n \gamma_i V_i(K).$$

Hadwiger 1957 körüli eredményéből következik például Blaschke korábbi tétetele az 1920-as évekből:

1.4. Tétel. Adott $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos értékelés, ami invariáns $SA(n)$ -re. Ekkor f a térfogat konstansszorozosa.

2. Affin felszín

$\mathbb{R}^n$ részhalmazain értelmezhető az úgynevezett $(n-1)$ -dimenziós Hausdorff mérték, mely $(n-1)$ -dimenziós kompakt konvex halmazokra megegyezik az $(n-1)$ -dimenziós Lebesgue mértékkel. Ha $K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ és $\text{int}K \neq \emptyset$, azaz $\dim(K) = n$, akkor ∂K -n mindig ez az $(n-1)$ -dimenziós Hausdorff mérték szerint integrálunk.

2.1. Definíció (Affin felszín). [3] Adott $K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Ha $\dim K \leq n-1$, akkor $\Omega(K) = 0$, és ha $\text{int}K \neq \emptyset$, azaz $\dim K = n$, akkor

$$\Omega(K) = \int_{\partial K} \kappa(K, x)^{\frac{1}{n+1}} dx,$$

ahol $\kappa(K, x)$ a Gauss-görbület, mely az $(n-1)$ -dimenziós Hausdorff mérték szerint majdnem minden $x \in \partial K$ -re értelmezett.

2.2. Tétel. $\Omega(K)$ -ra teljesülnek az alábbiak:

1. $\Omega(K)$ értékelés;
2. $\Omega(K)$ $SA(n)$ -invariáns, azaz $\Omega(SK + b) = \Omega(K) \quad \forall S \in SL(n), b \in \mathbb{R}^n$
3. $\Omega(K)$ felülről félig folytonos, azaz $\Omega(K) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \Omega(K_i)$
ha $K_i \rightarrow K$

A következő tétel a Hadwiger-tétel megfelelője $SA(n)$ -invariáns, felülről félig folytonos értékelésekre.

2.3. Tétel (Ludwig-Reitzner). *Adott $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ felülről félig folytonos, $SA(n)$ -invariáns értékelés, akkor $\exists c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \geq 0$*

$$f(K) = c_0 + c_1 V_n(K) + c_2 \Omega(K)$$

Ahol V_n a térfogat.

2.4. Definíció. Legyen $\mathcal{C}_0^n \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ azon kompakt, konvex halmazok tere, amik a belsejükben tartalmazzák az origót.

2.5. Definíció (Centro-affin felszín). Ha $K \in \mathcal{C}_0^n$, akkor K centro-affin felszíne az alábbi integrál

$$\Omega_0(K) = \int_{\partial K} \frac{\kappa_K(x)^{\frac{1}{2}}}{\langle x, \nu_K(x) \rangle^{\frac{n-1}{2}}} dx,$$

ahol $\nu(x)$ az x -beli, kifelé mutató egység normális vektor, mely az $(n-1)$ -dimenziós Hausdorff mérték szerint majdnem minden $x \in \partial K$ -re értelmezett.

A centro-affin felszín értékelés, felülről félig folytonos és $GL(n)$ -invariáns (viszont az eltolásra nem invariáns, már csak azért sem, mert csak az origót a belsejükben tartalmazó konvex alakzatokra van definiálva)

2.6. Tétel. *Adott $f: \mathcal{C}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ Felülről félig folytonos, $GL(n)$ -invariáns értékelés, akkor $\exists c_0, c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \geq 0$*

$$f(K) = c_0 V_n(K) + c_1 \Omega_0(K).$$

A ha fenti tételben a $GL(n)$ -t $SL(n)$ -re cseréljük, arra az esetre is vannak hasonló karakterizációs tételek, amikben az affin felszín további általánosításai jelennek meg. A centro-affin felszínt a síkon először Tzitzéica[8] vizsgálta 1908-ban. Blaschke foglalkozott komolyabban konvex, $\mathcal{C}^2$ -határú testek affin- és centro-affin felszínével $\mathbb{R}^2$ - és $\mathbb{R}^3$ -ben[4]. Ő állapította meg ezek invarianciáját a megfelelő csoport-hatásokra, illetve bebizonyította bizonyos izoperimetrikus egyenlőtlenségeket ezekre.

2.7. Tétel (izoperimetrikus egyenlőtlenségek). *Fix térfogatú (origót a belsejében tartalmazó) konvex halmazok közül az ellipszoidnak a legnagyobb (centro-) affin felszíne.*

Ezeket az eredményeket Santaló[7] általánosította tetszőleges dimenziókra. Végül Dolzmann és Hug [6] terjesztette ki ezeket $\mathcal{C}^2$ -határuakról tetszőleges konvex testekre és bebizonyította a felülről félig folytonosságot.

3. Vektor értékű értékelések

Az alábbiakban $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ értékeléseket nézünk.[5]

3.1. Definíció (ekvivariancia/kovariancia). Adott $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ és G csoport, ami hat $\mathbb{R}^n$ -en. Ekkor f G -ekvivariáns (más szóval kovariáns), ha $\forall \phi \in G$ és $\forall K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $f(\phi(K)) = \phi(f(K))$

Például a köréirt- és beírt gömb középpontja (mint $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény) ekvivariáns $O(n)$ -re és az eltolásokra, míg a súlypont ekvivariáns $GL(n)$ -re és az eltolásokra. Mert "együtt mozog" a testtel, de ezek egyike sem értékelés.

3.2. Definíció (Momentum vektor). Adott $K \in \mathcal{C}_0^n$, ekkor $m: \mathcal{C}_0^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ K momentum vektora az alábbi módon definiált integrál

$$m(K) = \int_K x dx$$

Ez egy vektor értékű értékelés. Ezt a térfogattal normálva megkapjuk a súlypontot. A momentum vektor ekvivariáns $SL(n)$ -re nézve, de nem ekvivariáns $GL(n)$ -re vagy az eltolásokra nézve.

3.3. Tétel. Adott $\mu: \mathcal{C}_0^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 3$ folytonos, $SL(n)$ -ekvivariáns értékelés akkor $\exists c \in \mathbb{R}$

$$\mu(K) = cm(K)$$

Ha csak a konvex, politópokra nézzük, akkor minden mérhető értékelésre teljesül ez, nemcsak a folytonosakra.

Megjegyzés: Itt a K -tól független konstans szerepel, a térfogat nem az, tehát a súlypont azért nem értékelés.

Az $n = 2$ esetben egy további definícióra van szükség.

3.4. Definíció (polár test). Adott $K \in \mathcal{C}_0^n$ ekkor

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x; y \rangle \leq 1 \forall y \in K\} \in \mathcal{C}_0^n.$$

3.5. Tétel. Adott $\mu: \mathcal{C}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos, $SL(2)$ -ekvivariáns értékelés akkor $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\mu(K) = c_1 m(K) + c_2 \rho_{\frac{\pi}{2}} m(K^*)$$

Ahol $\rho_{\frac{\pi}{2}}$ az origó körüli, pozitív irányú forgatás, $\frac{\pi}{2}$ szöggel.

Hivatkozások

- [1] Dorogi Imre László: Geometriai értékelések, 2024.
- [2] D. A. Klein: A short proof of Hadwiger's characterization theorem, 1995, 329-339
- [3] Monika Ludwig and Matthias Reitzner: A Classification of $SL(n)$ invariant Valuations, Technische Universitat Wien, Austria, Polytechnic Institute of New York University 2000, 1-3
- [4] W. Blaschke: Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie. Springer, Berlin, 1923.
- [5] Christoph Haberl and Lukas Parapatits: Moments and Valuations, Vienna University of Technology, Institute of Discrete Mathematics and Geometry, 1040 Wien, Austria
ETH Zurich Department of Mathematics 8092 Zürich, Switzerland, 1-3
- [6] G. Dolzmann, D. Hug: Equality of two representations of extended affine surface area. Arch. Math. (Basel), 65 (1995), 352-356.
- [7] L.A. Santaló: An affine invariant for convex bodies of n -dimensional space. (Spanish) Portugaliae Math., 8 (1949), 155-161.
- [8] G. Tzitzéica: Sur une nouvelle classe de surfaces. Rend. Circ. Mat. Palermo, 25 (1908), 180-187.