

$SL(n)$ invariáns- és ekvivariáns értékelések

Dorogi Imre László

2025 június

Az értékelések definíciója

Definíció (Értékelés)

Legyen $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \subseteq P(\mathbb{R}^n)$ a kompakt, konvex halmazok tere. $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ értékelés, ha $\forall A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ -re igaz, hogy, amennyiben $A \cup B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, akkor $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$. A képhalmaz lehet $\mathbb{R}^m$, de akár tetszőleges félcsoport is. Ebben a dolgozatban valós- illetve vektor értékűekkel foglalkozok.

Pl. felszín, térfogat, átlagos szélesség, konstans függvény, Euler-karakterisztika (ez konvexeken konstans) és ezek lineáris kombinációi. Kompakt halmazokon is értelmezhetőek az értékelések, de ott pl. a térfogat nem folytonos (a Hausdorff-metrika szerint).

Tavaly itt hagytuk abba (Hadwiger tétele)

Adott $f : \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre $f(\emptyset) = 0$, és teljesíti az alábbiakat

■ f értékelés, azaz, ha $A, B, A \cup B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, akkor

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B);$$

■ f folytonos a Hausdorff-metrika szerint;

■ f egybevágóság invariáns;

Ekkor f előáll belső térfogatok lineáris kombinációjaként, tehát léteznek olyan $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy

$$f(K) = \sum_i^n \gamma_i V_i(K).$$

Valós értékű értékelések

Blaschke tétele

Adott $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos értékelés, ami invariáns $SA(n)$ -re. Ekkor f a térfogat konstansszorosa.

Valós értékű értékelések

Blaschke tétele

Adott $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos értékelés, ami invariáns $SA(n)$ -re. Ekkor f a térfogat konstansszorososa.

Definíció: Affin felszín

Adott $K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Ha $\dim K \leq n - 1$, akkor $\Omega(K) = 0$, és ha $\text{int} K \neq \emptyset$, azaz $\dim K = n$, akkor

$$\Omega(K) = \int_{\partial K} \kappa(K, x)^{\frac{1}{n+1}} dx,$$

ahol $\kappa(K, x)$ a Gauss-görbület, mely az $(n - 1)$ -dimenziós Hausdorff mérték szerint majdnem minden $x \in \partial K$ -re értelmezett.

Az affin felszín tulajdonságai

- $\Omega(K)$ értékelés;
- $\Omega(K)$ $SA(n)$ -invariáns, azaz $\Omega(SK + b) = \Omega(K) \quad \forall S \in SL(n),$
 $b \in \mathbb{R}^n$
- $\Omega(K)$ felülről félig folytonos, azaz $\Omega(K) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \Omega(K_i)$
ha $K_i \rightarrow K$

Az affin felszín tulajdonságai

- $\Omega(K)$ értékelés;
- $\Omega(K)$ $SA(n)$ -invariáns, azaz $\Omega(SK + b) = \Omega(K) \quad \forall S \in SL(n), b \in \mathbb{R}^n$
- $\Omega(K)$ felülről félig folytonos, azaz $\Omega(K) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \Omega(K_i)$
ha $K_i \rightarrow K$

Tétel (Ludwig-Reitzner)

Adott $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ felülről félig folytonos, $SA(n)$ -invariáns értékelés, akkor $\exists c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \geq 0$

$$f(K) = c_0 + c_1 V_n(K) + c_2 \Omega(K)$$

Ahol V_n a térfogat.

Definíció: Centro-affin felszín

Ha $K \in \mathcal{C}_0^n$, akkor K centro-affin felszíne az alábbi integrál

$$\Omega_0(K) = \int_{\partial K} \frac{\kappa_K(x)^{\frac{1}{2}}}{\langle x, \nu_K(x) \rangle^{\frac{n-1}{2}}} dx,$$

ahol $\nu(x)$ az x -beli, kifelé mutató egység normális vektor, mely az $(n-1)$ -dimenziós Hausdorff mérték szerint majdnem minden $x \in \partial K$ -re értelmezett.

A centro-affin felszín tulajdonságai

A centro-affin felszín értékelés, felülről félig folytonos és $GL(n)$ -invariáns

A centro-affin felszín tulajdonságai

A centro-affin felszín értékelés, felülről félig folytonos és $GL(n)$ -invariáns

Tétel

Adott $f: \mathcal{C}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ Felülről félig folytonos, $GL(n)$ -invariáns értékelés, akkor
 $\exists c_0, c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \geq 0$

$$f(K) = c_0 + c_1 \Omega_0(K).$$

Ha a $GL(n)$ -t $SL(n)$ -re cseréljük, arra is van hasonló karakterizációs tétel, amiben az affin felszín további verziói jelennek meg.

Vektor értékű értékelések

Definíció: ekvivariancia/kovariancia

Adott $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ és G csoport, ami hat $\mathbb{R}^n$ -en. Ekkor f G -ekvivariáns (más szóval kovariáns), ha $\forall \phi \in G$ és $\forall K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $f(\phi(K)) = \phi(f(K))$

Vektor értékű értékelések

Definíció: ekvivariancia/kovariancia

Adott $f: \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ és G csoport, ami hat $\mathbb{R}^n$ -en. Ekkor f G -ekvivariáns (más szóval kovariáns), ha $\forall \phi \in G$ és $\forall K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $f(\phi(K)) = \phi(f(K))$

Definíció: momentum vektor

Adott $K \in \mathcal{C}_0^n$, ekkor $m: \mathcal{C}_0^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ K momentum vektora az alábbi módon definiált integrál

$$m(K) = \int_K x dx$$

Tétel

Adott $\mu: \mathcal{C}_0^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ folytonos, $SL(n)$ -ekvivariáns értékelés akkor $\exists c \in \mathbb{R}$

$$\mu(K) = cm(K)$$

Ha csak a konvex, politópokra nézzük, akkor minden mérhető értékelésre teljesül ez, nemcsak a folytonosakra.

Köszönöm a figyelmet!