Teljes párosítások síkgráfokban

Egyéni kutatómunka beszámoló

Borbényi Márton

A matematikában, illetve a statisztikus fizikában fontos szerepet játszanak a gráfok és párosításaik. Ezt a statisztikus fizikában monomer-dimer rendszernek nevezik, és gyakran részecskék kapcsolatait modellezik segítségükkel.

1 Teljes párosítások számolása

Kestelyn, illetve tőle függetlenül Temperley és Lieb is adott egy algoritmus, ami síkgráfok esetén gyorsan számolja a teljes párosításokat. Ehhez a gráfnak még párosnak sem kell lennie, működik akkor is, ha vannak páratlan körök. Én a félév során Kastelyn eredményét [1] olvastam. Ez a bizonyítás algebrai, mátrixok és generátorfüggvények tulajdonságait használja. A módszer a ferdén szimmetrikus mátrixok illetve a pfaffian kapcsolatán alapul.

Definíció 1.1. *Az A mátrix ferdén szimmetrikus (skew-symmetric), ha $A^T = A$.*

Amennyiben A páratlan×páratlan dimenziós, akkor $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = -\det(A)$, azaz $\det(A) = 0$. Ha A $2n \times 2n$ méretű, akkor a determináns lehet nem triviális. Ám ekkor is van szép tulajdonságokkal bír. Ehhez szükségünk van a Pfaffian definíciójára.

Definíció 1.2. *Egy A ferdén szimmetrikus mátrix Pfaffianja:*

$$pf(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} sgn(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma_{2k-1},\sigma_{2k}}.$$

Tétel 1.3 (Cayley(1849))**.** *Amennyiben A egy $2n \times 2n$ méretű ferdén szimmetrikus mátrix, akkor*

$$\det(A) = pf(A)^2.$$

Ez a tétel nem csak azért hasznos nekünk, mert tudunk gyököt vonni a determinánsból, hanem mert a Pfaffian kapcsolatot teremt a teljes párosítások és a determináns között: Pfaffian definíciójában a szorzatban teljes párosítások szerepelnek.

Kastelyn algoritmusa ezeket az összefüggéseket használta ki. Vegyünk egy G síkgráfot, ami már síkba van rajzolva. Először ezt fogjuk megirányítani az alábbi módon: minden kör, ami egy korlátos összefüggőségi tartomány határa, páratlan sok pozitív irányítású élt tartalmazzon. Legyen ennek az adjacencia mátrixa C. Most pedig nézzük a $B = C - C^T$ mátrixot. Ez a mátrix majdnem a G gráf adjacenciamátrixa (A), csupán a_{ij} vagy a_{ji} közül az egyik negatív előjellel szerepel. Ekkor Kastelyn belátta az alábbi tételt:

Tétel 1.4. $\sqrt{\det(B)} = |pf(B)|$ *éppen a teljes párosítások száma.*

Ilyen irányítást pedig nem nehéz csinálni, a minden tartomány határát egymás után jól irányítjuk meg. Közben arra figyelünk, hogy egy eddig meg nem irányított tartományt ne vegyünk körbe: csupán bentről kívülre haladunk a tartományokon.

2 Páros síkgráfok

Amennyiben tudjuk, hogy a G gráfunk páros, akkor nem is kell az irányítással törődnünk. Vegyük a két színosztályát: $a_1, a_2, ...a_n$ illetve $b_1, b_2, ..., b_n$. Ekkor a gráf incidenciamátrixa egész egyszerűen néz ki: $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$. Ekkor

$$\sqrt{\det(A)} = |\det(B)| = \left| \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{A_i, B_{\sigma(i)}} \right|.$$

Ez akkor adná vissza a teljes párosítások számát, ha minden tag ugyanolyan előjellel szerepelne. Tehát ekkor a párosítások számát gyorsan ki tudnánk számolni, csak egy determináns kell kiszámolni. Ez előnyösebb, mint Kastelyn konstrukciója, itt nem kell gyököt vonni. Azaz az élekre szeretnénk ± 1 súlyokat (vagy akár komplex egységgyököket rakni) úgy, hogy a determinánsban minden nem nulla tag azonos előjelű legyen. És ez megtehető, az alábbi módon: megnézzük egy korlátos összefüggőségi tartomány határát: amennyiben $4k$ éle van, akkor páratlan sok, ha $4k + 2$ van, akkor pedig páros darab -1-et van rajta. Ekkor minden nem nulla tagnak azonos előjele van a determinánsban. Ez valójában Kastelyn fenti eredménye, kicsit átfogalmazva páros gráfokra.

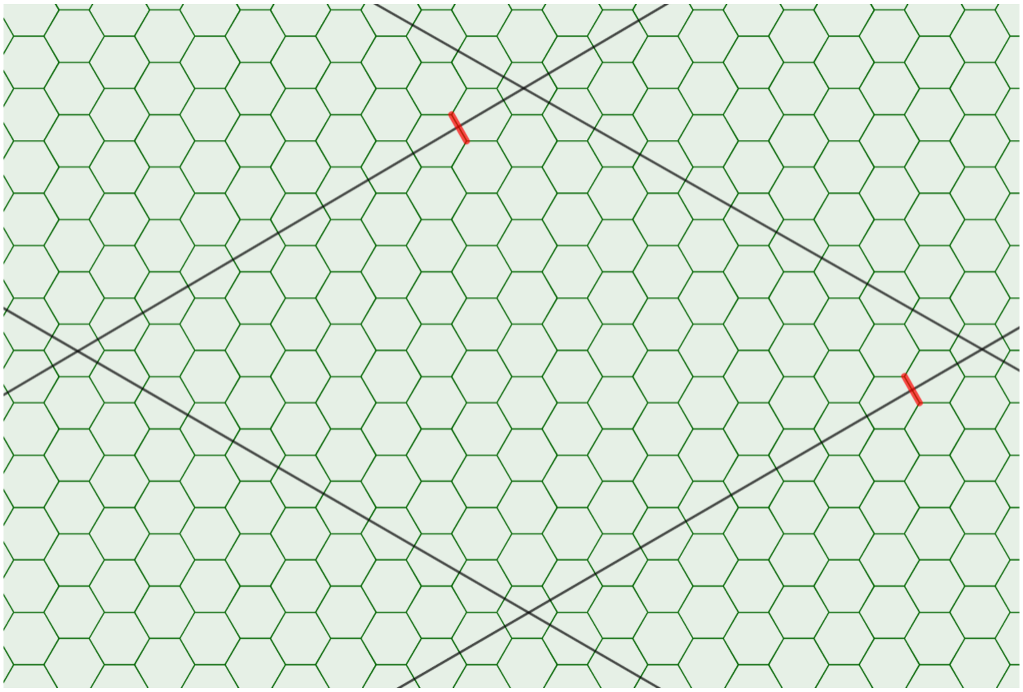
Ezekre az eredményekre építve Kenyon szép végtelen gráfok párosításaival foglalkozott [2]. Pontosabban négyzetráccsal és a hatszögráccsal, de eredményeit a hatszögrácsra mondta ki, mivel itt a teljes párosítások éppen a B determinánsának értéke, mivel minden tartomány egy hatszög.

Kenyon ebben a cikkben a végtelen hatszögrács eltolásinvariáns folytonos véletlen párosításaival foglalkozott. Eltolásinvariáns abban az értelemben, hogy a valószínűségi mérték eltolásinvariáns. Folytonos, azaz egy adott párosítás mértéke 0. Ilyen mértéket létrehozni se egyszerű.

3 Mérték létrehozásra

Az első ötlet az lehetne, hogy vegyük az origó egyre nagyobb környzeteit (U_n), minden G_n-nen csináljunk egy véletlen párosítást, (mondjuk egyenletesen választunk egy teljes párosítást), ez legyen M_n. És ezen M_n-ek valamilyen értelemben vett határértéke jó lesz. Sajnos ezzel egy probléma van: G_n határán furán viselkednek a párosítások, és ez nagyon be tudja zavarni véletlen választást. Ezért egy kicsit más megközelítés kell.
A javítás az, hogy máshogyan kell venni a G_n-eket: először is egy szép környezetét vesszük az origónak, ahogyan ábra is mutatja. Majd a szemközti éleket, például a két piros él, egy éllé húzzuk össze.

Ekkor sajnos G_n nem lesz síkgráf, mivel a $\mathbb{T}^2$-re rajzoltuk rá. Ám ezzel probléma könnyedén javítható: a párosítások száma nem egy determináns, hanem $\frac{1}{2}(-\det(B_1) + \det(B_2) + \det(B_3) + \det(B_4))$, ahol B_i annyiban különbözik B-től, hogy némelyik új él (amik távoli csúcsokat kötnek össze), -1-es előjelet kap.



Forrás: https://www.geogebra.org/m/uzHEkdej

A mértéket pedig a cilinderhalmazok segítségével adjuk meg: adott E' véges élhalmaza G-nak, ekkor

$$\mathbb{P}(E' \text{ benne van a véletlen párosításban } G\text{-nek}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E' \text{ benne van a véletlen párosításban } G_n\text{-nek}).$$

(Ez nem az össze cilinderhalmaz, ott véges sok élről megmondhatjuk, hogy benne, véges sokról pedig azt hogy nincs. De ez nem baj, mivel ezek elérhetőek szita-formulával.) Ez így megad egy valószínűségi mértéket egy olyan téren, aminek pontjai: $\{0,1\}^E$, a szigma-algebra ezen a Borelek. (Ez a tér homeomorf a Cantor-halmazzal, és annak a nyílt zárt bázis valójában a cilinderhalmazok a párosítások terében). Ez a definíció pedig a gyenge konvergencia: legyen M_n a G_n véletlen párosítása. Ekkor $M_n \rightharpoonup M$, és mi ezt az M-et hívjuk a véletlen párosításnak.

Legyen $U_{E'}$ az az esemény, hogy $E \subset M$. Ezen $\mathbb{P}(U_{E'})$ értékeket értette Kenyon meg jobban. Azt bizonyította be, hogy ez valójában $|E'| \times |E'|$ méretű determináns. Legyen $E' = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$, ahol $e_i = (a_i, b_i)$, ahol A az egyik színosztály, B pedig a másik.

Tétel 3.1 (Kenyon)**.** *Legyen $B_{E'}$ az a mátrix, aminek (i,j) eleme $P(a_i - b_j)$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(E' \subset M) = \det(B_{E'}).$$

Itt valójában $P(a_i - b_j)$ egy paraméteres integrál, ezt hívjuk a párosodási függvénynek (coupling function). Ennek az az érdekes tulajdonsága van, hogy benne van $\mathbb{Q} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\mathbb{Q}$-ban. Ennek közvetlen eredménye, hogy ezen valószínűségek értéke benne van $\mathbb{Q}[\frac{\sqrt{3}}{\pi}]$-ban.

Másik fontos eredmény, ami kijön ebből a felírásból, hogy ha két E', E'' élhalmaz messze van egymástól, $U_{E'}$, $U_{E''}$ pedig a hozzájuk tartozó cilinderesemény, v pedig egy periódusa a G gráfnak, akkor

$$\mathbb{P}(U_{E'} \cap U_{v+E''}) = \mathbb{P}(U_{E'})\mathbb{P}(U_{E''}) + O(|v|^{-2}).$$

Azaz nem precízen szólva: távoli párosítások nem befolyásolják egymást, majdnem függetlenek egymástól.

4 Általánosabb eset

Ennek a cikknek megjelent egy folytatása is, amit Kenyon, Okounkov, Sheffield írtak [3]. Ez a fenti állításokat próbálja általánosítani. Olyan végtelen páros síkgráfokkal foglalkoznak, amik eltolásinvariánsak a $\mathbb{Z}^2$ csoportra. Itt hasonló tételeket bizonyítanak, mint Kenyon eredeti cikkében, általánosabb gráfokban.

Hivatkozások

[1] P. Kasteleyn, *Graph theory and crystal physics*, Graph theory and theoretical physics, (1967), pp. 43–110.

[2] R. Kenyon, *Local statistics of lattice dimers*, in Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics, vol. 33, Elsevier, 1997, pp. 591–618.

[3] R. Kenyon, A. Okounkov, and S. Sheffield, *Dimers and amoebae*, Annals of mathematics, (2006), pp. 1019–1056.