Teljes párosítások síkgráfokban

Borbényi Márton

Témavezető: Csikvári Péter

Páros síkgráfok

Álom

Adott G páros gráf, adjacenciamátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathit{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i,\sigma(i)}$.
Ez majdnem teljes párosítások, némelyik különböző előjellel.

Tétel (Kasteleyn)

Amennyiben G síkbarajzolható, lehet éleinek ± 1 súlyokat adni, hogy

$$\mathit{pm}(G) = |\det(B)|.$$

Páros síkgráfok

Álom

Adott G páros gráf, adjacenciamátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathit{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i,\sigma(i)}$.
Ez majdnem teljes párosítások, némelyik különböző előjellel.

Tétel (Kasteleyn)

Amennyiben G síkbarajzolható, lehet éleinek ± 1 súlyokat adni, hogy

$$\mathit{pm}(G) = |\det(B)|.$$

Véletlen teljes párosítás

Definíció

Véletlen egyenletes teljes párosítás: egyenletes választunk egyet. Legyen ez M.

Legyen E' élek egy részhalmaza. Ekkor $\mathbb{P}(E' \subset M)$ is szépen számolható páros síkgráfok esetén. Legyen ez az esemény $U_{E'}$.

Tétel

Legyen B előző mátrix, $(B)_{E'}$ pedig B sorai és oszlopai közül E' csúcsait kitöröljük. Ekkor

$$\mathbb{P}(E' \subset M) = \mathbb{P}(U_{E'}) = \left|\det(B)^{-1}\det(B_{E'})\right|.$$

Véletlen teljes párosítás

Definíció

Véletlen egyenletes teljes párosítás: egyenletes választunk egyet. Legyen ez M.

Legyen E' élek egy részhalmaza. Ekkor $\mathbb{P}(E' \subset M)$ is szépen számolható páros síkgráfok esetén. Legyen ez az esemény $U_{E'}$.

Tétel

Legyen B előző mátrix, $(B)_{E'}$ pedig B sorai és oszlopai közül E' csúcsait kitöröljük. Ekkor

$$\mathbb{P}(E' \subset M) = \mathbb{P}(U_{E'}) = |\det(B)^{-1}\det(B_{E'})|.$$

Végtelen gráfok

Példa

Végtelen négyzetrács, hatszögrács.
Fontos fizikai kapcsolat: monomer-dimer modell, kristályrácsok.

Kérdés

Hogyan definiáljunk véletlen párosítást ezekben a gráfokban?
Elvárások: eltolásinvariáns, "folytonos", "maximális".

Ötlet

Legyen origo növő környezete G_n, itt van M_n véletlen párosítás, ezek gyengén tartanak egy M véletlen párosításhoz:

$$\mathbb{P}_n(U_{E'}) \to \mathbb{P}(U_{E'}).$$

Ez nem jó! Határon nem jól viselkednek a dolgok.

Végtelen gráfok

Példa

Végtelen négyzetrács, hatszögrács.
Fontos fizikai kapcsolat: monomer-dimer modell, kristályrácsok.

Kérdés

Hogyan definiáljunk véletlen párosítást ezekben a gráfokban?
Elvárások: eltolásinvariáns, "folytonos", "maximális".

Ötlet

Legyen origo növő környezete G_n, *itt van* M_n *véletlen párosítás, ezek gyengén tartanak egy* M *véletlen párosításhoz:*

$$\mathbb{P}_n(U_{E'}) \to \mathbb{P}(U_{E'}).$$

Ez nem jó! Határon nem jól viselkednek a dolgok.

Végtelen gráfok

Példa

Végtelen négyzetrács, hatszögrács.
Fontos fizikai kapcsolat: monomer-dimer modell, kristályrácsok.

Kérdés

Hogyan definiáljunk véletlen párosítást ezekben a gráfokban?
Elvárások: eltolásinvariáns, "folytonos", "maximális".

Ötlet

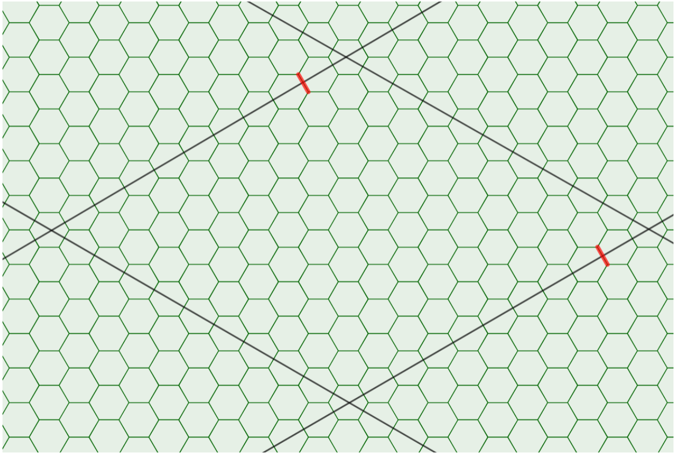
Legyen origo növő környezete G_n*, itt van* M_n *véletlen párosítás, ezek gyengén tartanak egy* M *véletlen párosításhoz:*

$$\mathbb{P}_n(U_{E'}) \to \mathbb{P}(U_{E'}).$$

Ez nem jó! Határon nem jól viselkednek a dolgok.

Kimerítés

$\mathbb{T}^2$-re rajzoljuk, ez legyen G_n.



Forrás: https://www.geogebra.org/m/uzHEkdej

Eredmények

Tétel

Itt $\mathbb{P}_n(U_{E'})$ *nem egy mátrixdetermináns mint síkgráfoknál, de majdnem.*

Tétel (Kenyon)

$\mathbb{P}(U_{E'}) = \det(M)$, *ahol* $m_{ij} = P(u_i - v_j) \in \mathbb{Q} \oplus \frac{\sqrt{3}}{\pi}\mathbb{Q}$.

Tétel (Kenyon)

Adott két párosítás, E', E''*. Ha távolaik, akkor majdnem függetlenek, azaz* $\mathbb{P}(U_{E'} \cap U_{v+E''}) = \mathbb{P}(U_{E'})\mathbb{P}(U_{E''}) + O(|v|^{-2})$.

Eredmények

Tétel

Itt $\mathbb{P}_n(U_{E'})$ *nem egy mátrixdeterminans mint síkgráfoknál, de majdnem.*

Tétel (Kenyon)

$\mathbb{P}(U_{E'}) = \det(M)$, *ahol* $m_{ij} = P(u_i - v_j) \in \mathbb{Q} \oplus \frac{\sqrt{3}}{\pi}\mathbb{Q}$.

Tétel (Kenyon)

Adott két párosítás, E', E''. *Ha távolaik, akkor majdnem függetlenek, azaz* $\mathbb{P}(U_{E'} \cap U_{v+E''}) = \mathbb{P}(U_{E'})\mathbb{P}(U_{E''}) + O(|v|^{-2})$.

Eredmények

Tétel

Itt $\mathbb{P}_n(U_{E'})$ *nem egy mátrixdetermináns mint síkgráfoknál, de majdnem.*

Tétel (Kenyon)

$\mathbb{P}(U_{E'}) = \det(M)$, *ahol* $m_{ij} = P(u_i - v_j) \in \mathbb{Q} \oplus \frac{\sqrt{3}}{\pi}\mathbb{Q}$.

Tétel (Kenyon)

Adott két párosítás, E', E''. *Ha távolaik, akkor majdnem függetlenek, azaz* $\mathbb{P}(U_{E'} \cap U_{v+E''}) = \mathbb{P}(U_{E'})\mathbb{P}(U_{E''}) + O(|v|^{-2})$.