

Gyimesi Péter projekt munka

May 2025

1 Probléma

A kutatás célja, hogy két elsőre távolinak látszó probléma között keressünk kapcsolatot.

Adott egy síkbarajzolható gráf, ezen egy kezdő és végpont s és t . A gráfon meg van adva az élek részhalmazainak (régiók) egy halmaza. Minden régió összefüggő a duális gráfban. Az összefüggőségre szükség van, mert enélkül NP -nehéz lenne a probléma. [1] Két út régiófüggetlen, ha nincs olyan régió, aminek mindkét úttal van metszete. Szeretnénk megkeresni a maximális méretű, egymást nem keresztező, régiófüggetlen $s - t$ utak halmazát.

2 Korábbi eredmények

Tegyük fel, hogy minden él legalább egy régióban benne van. Ha ez nem teljesül, akkor csak össze lehet húzni az él mentén a gráfot és ugyanúgy igazak maradnak a feltételek. Legyen K a maximális feltételeket teljesítő úthalmaz mérete, R a régióknak olyan halmaza, hogy minden $s - t$ útnak van metszete az R -ben lévő régiók uniójával. Nyilvánvaló, hogy $|R| \leq K$ és egy korábbi tétel alapján $|R| \leq K + 2$. [4] Vegyünk a duális gráfban egy C körsétát. Egy körsétára definiáljunk két értéket: $l(C)$ -minimum hányszor kell régiót váltani ezen a körsétán. $w(c)$ - a séta hányszor választja el egymástól az s és t csúcsokat. Ha $k \geq 2$, akkor

$$k = \min \left\{ \left\lfloor \frac{l(c)}{w(c)} \right\rfloor \mid C \text{ duális körséta, } w(c) \geq 1 \right\}.$$

Az utak megkeresésére is létezik hatékony algoritmus, ami a duális gráfban felosztja a területeket úgy hogy a különböző csoportok közötti utak valóban régiófüggetlenek legyenek. [5]

3 Lehetőségek

Az eredeti problémával már régóta foglalkozok, néhány ehhez valamennyire kapcsolódó feladatot vizsgáltam meg. Ezekből ez az egyik.

Legyen T a négyzethálós lapon a kis négyzeteknek egy (oldalasan) összefüggő részhalmaza. Két T -ben lévő kis négyzetre azt mondjuk, hogy függetlenek, ha nincs olyan tengelyekkel párhuzamos téglalap T -ben, ami mindkét kis négyzetet lefedi.

Itt lehet definiálni T minimális fedését is: a legkisebb tengelyekkel párhuzamos téglalapokból álló halmaznak a mérete, aminek az uniója T .

Legyen P a maximális független ponthalmaz és F a minimális fedés mérete. Érdemes figyelni P és F kapcsolatát. Könnyen látható, hogy $P \leq F$.

Győri tétele: T függőlegesen konvex, ha T bármely függőleges egyenessel vett metszete egy szakasz. Ha T függőlegesen konvex, akkor $P = F$.

Szintén érdekes tétel, hogy ha T egyszerűen összefüggő, akkor $P \leq F \leq 2 \cdot P$ [2].

Az eredeti problémával a kapcsolat: ha az alakzat felett felvesszük az s és alatta a t pontot, a gráf csúcsai ezen kívül a T -ben lévő kis négyzetek, minden belső csúcs össze van kötve az s és t csúcsokkal. Minden T -ben lévő téglalap egy régiónak felel meg.

Így a maximális független ponthalmaz az eredeti feladatban maximális méretű régiófüggetlen úthalmaz lesz és valamennyire egy vágás vagy körséta megfelel egy fedésnek. Mivel az így kapott gráf nem síkbarajzolható, nem lehet alkalmazni a korábbi tételeket. Ennek ellenére vannak egyértelmű hasonlóságok is, a kutatás egyik célja a két terület közötti esetleges összefüggések feltárása.

Hasonló témakörben még lehet vizsgálni, például ha a független pontokat csak az alakzat szélén választhatjuk, vagy ha a téglalapokkal elég csak a külső sávot lefedni. Több érdekes kérdés is van például általános esetben mi $\frac{P}{F}$ maximuma, illetve milyen alakzatoknál teljesül egyenlőség. [3]

References

- [1] Dan Bienstock. Some generalized max-flow min-cut problems in the plane. *Mathematics of Operations Research*, 16(2):310–333, 1991.
- [2] Győri Ervin. Covering simply connected regions by rectangles. 1985.
- [3] Aniket Basu Roy. Covering simple orthogonal polygons with rectangles. 2016.
- [4] Balázs Vass, Erika Bérczi-Kovács, Ábel Barabás, Zsombor László Hajdú, and János Tapolcai. Polynomial-time algorithm for the regional SRLG-disjoint paths problem. In *Proc. IEEE INFOCOM*, London, United Kingdom, May 2022.
- [5] Balázs Vass, Erika Bérczi-Kovács, Péter Gyimesi, and János Tapolcai. Efficient computing of disaster-disjoint paths: Greedy and beyond. In *2024 IEEE Conference on Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPS)*, Vancouver, Canada, May 2024.