

Hiba-független utak és elméleti háttérük

Gyimesi Péter

Matematika MSc
ELTE TTK

Június 5, 2025

Motiváció



Probléma bevezetése

Bemenet:

- Síkgráf $G = (V, E)$, csúcsok $s, t \in V$
- G duálisa: $G^* = (V^*, E^*)$ és egy bijekció az élek és duálisaik között
- $S \subset 2^E$ duálisan összefüggő régiók egy listája

Definíció

Egy régió az élek egy olyan részhalmaza egy hálózatban, aminek az élei egyszerre meghibásodhatnak.

Definíció

Az élek egy $S \subset E$ részhalmaza **duálisan összefüggő**, ha az S éleinek duálisai által alkotott részgráf G^* -ban összefüggő.

Probléma bevezetése

Kimenet:

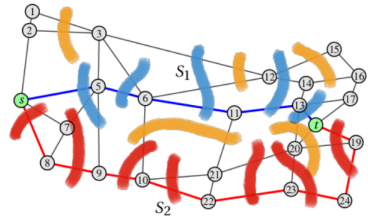
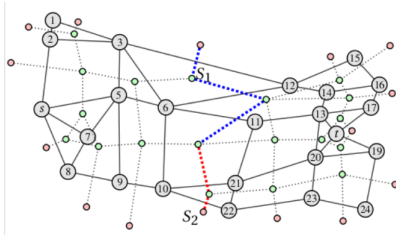
- Egy maximális méretű halmaza régió-független, **nem keresztező** $s - t$ -utaknak. A halmaz méretét jelöljük k -val.

Definíció

Két $s - t$ -út **régió-független** ha nem létezik olyan régió $\mathcal{S}$ -ben, ami mindkettőből tartalmaz élt.

- Az általános eset NP nehéz ezért kell néhány megkötést tenni
- Síkbarajzolható a gráf és összefüggők a régiók
- A kiválasztott utak nem keresztezhetik egymást

Felső becslés



- Ha ki lehet választani r régiót úgy, hogy minden $s - t$ út tartalmazzon élt a régiók uniójából akkor $k \leq r$
- Ennél lehet erősebb felső becslést is mondani

Kapcsolódó feladatok

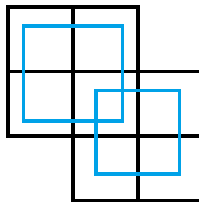
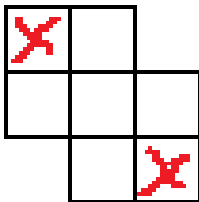
Adott egy négyzethálós lapon kis négyzetek összefüggő T halmaza. Ezen vizsgálhatunk különböző értékeket:

- Egy maximális méretű halmaza régió-független, **nem keresztező** $s - t$ -utaknak. A halmaz méretét jelöljük k -val.

Definíció

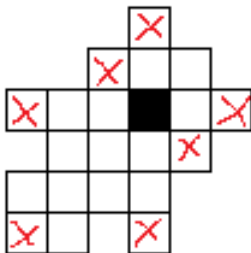
Két T -ben lévő kis négyzet (vagy pont) független ha nincs T -ben tengelypárhuzamos téglalap, ami mindkét kis négyzetet fedi..

- Legyen P a maximális független ponthalmaz mérete
- Legyen F a minimális T -t pontosan lefedő téglalaphalmaz mérete.

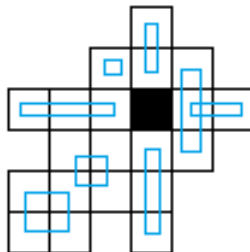


Eredmények

- Könnyen látható, hogy $P \leq F$. De $P = F$ nem mindig teljesül.
- Ha T függőlegesen konvex (minden függőleges egyenessel vett metszete összefüggő), akkor $P = F$
- Ha T egyszeresen összefüggő, akkor $P \leq 2 * P$



$P=7$



$F=8$

Nyitott kérdések

- Pontosan milyen alakzatokra teljesül egyenlőség?
- Mennyi lehet $\frac{F}{P}$ maximuma?
- Mi történik, ha a kis négyzeteket csak az alakzat határán szeretnénk választani, illetve csak azt kell lefedni a téglalappal?
- Ezek és a korábban vizsgált értékek között milyen összefüggések vannak?

Köszönöm a figyelmet!