Iwasawa-elmélet

Egyéni kutatómunka 1

Márton Dénes

Témavezető: Zábrádi Gergely

Budapest, 2024. január 9.

Jelölések

Legyen p páratlan prím, n természetes szám, $\mu_{p^{n+1}}$ a p^{n+1}-dik egységgyökök halmaza, $\mathcal{K}_n = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})$, illetve $\mathcal{U}_n$ a $\mathcal{K}_n$ egészeinek gyűrűjének egységei.

Jelölések

Legyen p páratlan prím, n természetes szám, $\mu_{p^{n+1}}$ a p^{n+1}-dik egységgyökök halmaza, $\mathcal{K}_n = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})$, illetve $\mathcal{U}_n$ a $\mathcal{K}_n$ egészeinek gyűrűjének egységei.
Legyenek ζ_n egységgyökök a $\mu_{p^{n+1}}$ csoportok valamilyen fix generátorai, melyekre $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$. Legyen $\pi_n = \zeta_n - 1$. Ekkor π_n prím $\mathcal{K}_n$ egészeinek gyűrűjében.

Jelölések

Legyen p páratlan prím, n természetes szám, $\mu_{p^{n+1}}$ a p^{n+1}-dik egységgyökök halmaza, $\mathcal{K}_n = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})$, illetve $\mathcal{U}_n$ a $\mathcal{K}_n$ egészeinek gyűrűjének egységei.
Legyenek ζ_n egységgyökök a $\mu_{p^{n+1}}$ csoportok valamilyen fix generátorai, melyekre $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$. Legyen $\pi_n = \zeta_n - 1$. Ekkor π_n prím $\mathcal{K}_n$ egészeinek gyűrűjében.
Legyen $R = \mathbb{Z}_p[[T]]$ hatványsorok gyűrűje. Minden $z \in \mathcal{U}_n$ egységhez létezik $f \in R$, amire $f(\pi_n) = z$. Baj: nem egyértelmű, csak gyenge értelemben tudjuk z deriváltját értelmezni.

Jelölések

Legyen p páratlan prím, n természetes szám, $\mu_{p^{n+1}}$ a p^{n+1}-dik egységgyökök halmaza, $\mathcal{K}_n = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})$, illetve $\mathcal{U}_n$ a $\mathcal{K}_n$ egészeinek gyűrűjének egységei.
Legyenek ζ_n egységgyökök a $\mu_{p^{n+1}}$ csoportok valamilyen fix generátorai, melyekre $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$. Legyen $\pi_n = \zeta_n - 1$. Ekkor π_n prím $\mathcal{K}_n$ egészeinek gyűrűjében.
Legyen $R = \mathbb{Z}_p[[T]]$ hatványsorok gyűrűje. Minden $z \in \mathcal{U}_n$ egységhez létezik $f \in R$, amire $f(\pi_n) = z$. Baj: nem egyértelmű, csak gyenge értelemben tudjuk z deriváltját értelmezni.
Ötlet:
Minden n-re egyszerre nézzük: legyen $\mathcal{U}_\infty = \varprojlim \mathcal{U}_n$, ahol az áttérési leképezéseket az $N_{n,m} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_m$ norma adja, ahol $n \geq m$.

Coates, Wiles, Coleman

Tétel

Minden $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathcal{U}_\infty$ egységre egyértelműen létezik $f_{\mathbf{u}}(T) \in R$ hatványsor, amire $f_{\mathbf{u}}(\pi_n) = u_n$ minden n-re.

Coates, Wiles, Coleman

Tétel

Minden $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathcal{U}_\infty$ egységre egyértelműen létezik $f_{\mathbf{u}}(T) \in R$ hatványsor, amire $f_{\mathbf{u}}(\pi_n) = u_n$ minden n-re.

Példa

Legyenek a és b relatív prímek p-hez, ekkor $\mathbf{c}(a,b) = (c_n(a,b)) \in \mathcal{U}_\infty$, ahol

$$c_n(a,b) = \frac{\zeta_n^{-a/2} - \zeta_n^{a/2}}{\zeta_n^{-b/2} - \zeta_n^{b/2}}.$$

A hozzá tartozó hatványsor pedig $f_{\mathbf{c}}(T) = w_a(T)/w_b(T)$, ahol

$$w_k(T) = \frac{(1+T)^{-k/2} - (1+T)^{k/2}}{T} \in R^\times,$$

ha $(k,p) = 1$.

Egyértelműség, Weierstrass előkészítési tétel

Tétel

Minden $f(T) \in R$ egyértelműen írható $f(T) = p^m g(T) w(T)$ alakba, ahol m nemnegatív egész, $g(T)$ egy olyan polinom, ami főegyütthatós, de a többi együtthatója $p\mathbb{Z}_p$-ben van, illetve $w(T) \in R^\times$.

Egyértelműség, Weierstrass előkészítési tétel

Tétel

Minden $f(T) \in R$ egyértelműen írható $f(T) = p^m g(T) w(T)$ alakba, ahol m nemnegatív egész, $g(T)$ egy olyan polinom, ami főegyütthatós, de a többi együtthatója $p\mathbb{Z}_p$-ben van, illetve $w(T) \in R^\times$.

Egy R-beli hatványsor konvergens $\overline{\mathbb{Q}_p}$ egészeinek gyűrűjének maximális ideálján. Tehát $f(\pi_n)$ értelmes minden f-re.

Tétel

Minden $f(T) \in R$ egyértelműen írható $f(T) = p^m g(T) w(T)$ alakba, ahol m nemnegatív egész, $g(T)$ egy olyan polinom, ami főegyütthatós, de a többi együtthatója $p\mathbb{Z}_p$-ben van, illetve $w(T) \in R^\times$.

Egy R-beli hatványsor konvergens $\overline{\mathbb{Q}_p}$ egészeinek gyűrűjének maximális ideálján. Tehát $f(\pi_n)$ értelmes minden f-re.
Egy R-beli egységnek nincs gyöke, tehát minden hatványsornak véges sok gyöke van, így $f_{\mathbf{u}}$ egyértelmű.

Norma, nyom

Definíció

Legyen $f \in R$ hatványsorra $\varphi(f)(T) = f((1+T)^p - 1)$. Ekkor φ egy injektív $\mathbb{Z}_p$-algebra endomorfizmus.

Norma, nyom

Definíció

Legyen $f \in R$ hatványsorra $\varphi(f)(T) = f((1+T)^p - 1)$. Ekkor φ egy injektív $\mathbb{Z}_p$-algebra endomorfizmus.

Állítás

Léteznek folytonos $\mathcal{N} : R \to R$, $\psi : R \to R$ leképezések, melyekre

$$(\varphi \circ \mathcal{N})(f)(T) = \prod_{\xi \in \mu_p} f(\xi(1+T) - 1)$$

$$(\varphi \circ \psi)(f)(T) = \frac{1}{p} \cdot \sum_{\xi \in \mu_p} f(\xi(1+T) - 1),$$

ahol ψ $\mathbb{Z}_p$-modulus homomorfizmus, $\psi \circ \varphi = 1_R$ az identitás, illetve $\mathcal{N}(fg) = \mathcal{N}(f)\mathcal{N}(g)$. Speciálisan $\mathcal{N}(R^\times) \subseteq R^\times$.

Létezés

A bizonyítás ötlete hogy $f \in W$, $W := \{f \in R^\times : \mathcal{N}(f) = f\}$ hatványsort keresünk.

Létezés

A bizonyítás ötlete hogy $f \in W$, $W := \{f \in R^\times : \mathcal{N}(f) = f\}$ hatványsort keresünk.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f \in R^\times$. Ekkor $g = \lim_{k\to\infty} \mathcal{N}^k(f)$ létezik és $g \in W$.

Létezés

A bizonyítás ötlete hogy $f \in W$, $W := \{f \in R^\times : \mathcal{N}(f) = f\}$ hatványsort keresünk.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f \in R^\times$. Ekkor $g = \lim_{k \to \infty} \mathcal{N}^k(f)$ létezik és $g \in W$.

Legyen $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_\infty$ és $f_n \in R^\times$ hatványsor, amire $f_n(\pi_n) = u_n$.

Létezés

A bizonyítás ötlete hogy $f \in W$, $W := \{f \in R^\times : \mathcal{N}(f) = f\}$ hatványsort keresünk.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f \in R^\times$. Ekkor $g = \lim_{k \to \infty} \mathcal{N}^k(f)$ létezik és $g \in W$.

Legyen $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_\infty$ és $f_n \in R^\times$ hatványsor, amire $f_n(\pi_n) = u_n$.
Ekkor a $g_n = \mathcal{N}^n(f_{2n})$ sorozatnak létezik torlódási pontja, mert R kompakt. Ez megfelelő.

Létezés

A bizonyítás ötlete hogy $f \in W$, $W := \{f \in R^\times : \mathcal{N}(f) = f\}$ hatványsort keresünk.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f \in R^\times$. Ekkor $g = \lim_{k\to\infty} \mathcal{N}^k(f)$ létezik és $g \in W$.

Legyen $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_\infty$ és $f_n \in R^\times$ hatványsor, amire $f_n(\pi_n) = u_n$.
Ekkor a $g_n = \mathcal{N}^n(f_{2n})$ sorozatnak létezik torlódási pontja, mert R kompakt. Ez megfelelő.

Tétel

Az $\mathbf{u} \mapsto f_\mathbf{u}$ hozzárendelés egy $\mathcal{G}$-izomorfizmus $\mathcal{U}_\infty$ és W között.

Létezés

A bizonyítás ötlete hogy $f \in W$, $W := \{f \in R^\times : \mathcal{N}(f) = f\}$ hatványsort keresünk.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f \in R^\times$. Ekkor $g = \lim_{k\to\infty} \mathcal{N}^k(f)$ létezik és $g \in W$.

Legyen $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_\infty$ és $f_n \in R^\times$ hatványsor, amire $f_n(\pi_n) = u_n$.
Ekkor a $g_n = \mathcal{N}^n(f_{2n})$ sorozatnak létezik torlódási pontja, mert R kompakt. Ez megfelelő.

Tétel

Az $\mathbf{u} \mapsto f_\mathbf{u}$ hozzárendelés egy $\mathcal{G}$-izomorfizmus $\mathcal{U}_\infty$ és W között.

Ahol $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$, $\chi : \mathcal{G} \to \mathbb{Z}_p^\times$ a körosztási karakter, azaz $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}$ minden $\sigma \in \mathcal{G}$ és $\zeta \in \mu_{p^\infty}$ esetén, illetve $\mathcal{G}$ hatása R-en:

$$(\sigma f)(T) = f((1+T)^{\chi(\sigma)} - 1) \quad (\sigma \in \mathcal{G},\ f \in R).$$

Egzakt sorozat I.

$$R^{\psi=1} = \{f \in R \;:\; \psi(f) = f\},\ R^{\psi=0} = \{f \in R \;:\; \psi(f) = 0\}$$

Egzakt sorozat I.

$$R^{\psi=1} = \{f \in R \ : \ \psi(f) = f\},\ R^{\psi=0} = \{f \in R \ : \ \psi(f) = 0\}$$

Lemma

Minden $f \in W$ hatványsorra az

$$\mathcal{L}(f) := \frac{1}{p} \log \left(\frac{f(T)^p}{\varphi(f)(T)} \right)$$

sorozat R-ben, sőt $R^{\psi=0}$-ban van. Az $\mathcal{L} : W \to R^{\psi=0}$ leképezés egy $\mathcal{G}$-homomorfizmus.

Egzakt sorozat I.

$$R^{\psi=1} = \{f \in R \ : \ \psi(f) = f\},\ R^{\psi=0} = \{f \in R \ : \ \psi(f) = 0\}$$

Lemma

Minden $f \in W$ hatványsorra az

$$\mathcal{L}(f) := \frac{1}{p} \log\left(\frac{f(T)^p}{\varphi(f)(T)}\right)$$

sorozat R-ben, sőt $R^{\psi=0}$-ban van. Az $\mathcal{L} : W \to R^{\psi=0}$ leképezés egy $\mathcal{G}$-homomorfizmus.

Legyen $A = \{\xi(1+T)^a \in R^\times \ : \ \xi \in \mu_{p-1},\ a \in \mathbb{Z}_p\}$ és $D(f) = (1+T)f'(T)$ differenciál operátor.

Egzakt sorozat I.

$$R^{\psi=1} = \{f \in R \ : \ \psi(f) = f\},\ R^{\psi=0} = \{f \in R \ : \ \psi(f) = 0\}$$

Lemma

Minden $f \in W$ hatványsorra az

$$\mathcal{L}(f) := \frac{1}{p} \log \left(\frac{f(T)^p}{\varphi(f)(T)} \right)$$

sorozat R-ben, sőt $R^{\psi=0}$-ban van. Az $\mathcal{L} : W \to R^{\psi=0}$ leképezés egy $\mathcal{G}$-homomorfizmus.

Legyen $A = \{\xi(1+T)^a \in R^\times \ : \ \xi \in \mu_{p-1},\ a \in \mathbb{Z}_p\}$ és $D(f) = (1+T)f'(T)$ differenciál operátor.

Tétel

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow W \xrightarrow{\mathcal{L}} R^{\psi=0} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

$\mathcal{G}$-modulusok egzakt sorozata, ahol $\alpha(f) = (Df)(0)$.

Logaritmikus derivált

Definíció

Minden $k \geq 1$-re $\delta_k : \mathcal{U}_\infty \to \mathbb{Z}_p$ logaritmikus derivált homomorfizmus a

$$\delta_k(\mathbf{u}) = \left(D^{k-1} \left(\frac{(1+T)f'_{\mathbf{u}}(T)}{f_{\mathbf{u}}(T)} \right) \right)_{T=0}$$

leképezés, ahol $T = 0$ azt jelenti, hogy a 0-ban felvett értékét vesszük.

Logaritmikus derivált

Definíció

Minden $k \geq 1$-re $\delta_k : \mathcal{U}_\infty \to \mathbb{Z}_p$ logaritmikus derivált homomorfizmus a

$$\delta_k(\mathbf{u}) = \left(D^{k-1} \left(\frac{(1+T) f'_{\mathbf{u}}(T)}{f_{\mathbf{u}}(T)} \right) \right)_{T=0}$$

leképezés, ahol $T = 0$ azt jelenti, hogy a 0-ban felvett értékét vesszük.

Lemma

Minden $k \geq 1$-re δ_k egy csoporthomomorfizmus, melyre minden $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_\infty$ és $\sigma \in \mathcal{G}$ esetén $\delta_k(\sigma(\mathbf{u})) = \chi(\sigma)^k \delta_k(\mathbf{u})$.

Logaritmikus derivált

Definíció

Minden $k \geq 1$-re $\delta_k : \mathcal{U}_\infty \to \mathbb{Z}_p$ logaritmikus derivált homomorfizmus a

$$\delta_k(\mathbf{u}) = \left(D^{k-1} \left(\frac{(1+T)f'_{\mathbf{u}}(T)}{f_{\mathbf{u}}(T)} \right) \right)_{T=0}$$

leképezés, ahol $T = 0$ azt jelenti, hogy a 0-ban felvett értékét vesszük.

Lemma

Minden $k \geq 1$-re δ_k egy csoporthomomorfizmus, melyre minden $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_\infty$ és $\sigma \in \mathcal{G}$ esetén $\delta_k(\sigma(\mathbf{u})) = \chi(\sigma)^k \delta_k(\mathbf{u})$.

Tétel

(i) $\delta_k(\mathbf{c}(a,b)) = 0$ ha $k = 1, 3, 5, \ldots$

(ii) $\delta_k(\mathbf{c}(a,b)) = (b^k - a^k)\zeta(1-k)$ ha $k = 2, 4, 6, \ldots$

(iii) $\delta_k(\mathcal{U}_\infty) = \mathbb{Z}_p$ ha $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Iwasawa-algebra

Definíció

Legyen $\mathfrak{G}$ provéges Abel csoport. Az Iwasawa-algebrájának hívjuk a

$$\Lambda(\mathfrak{G}) = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathfrak{G}/\mathfrak{H}]$$

kompakt topologikus $\mathbb{Z}_p$-algebrát.

Iwasawa-algebra

Definíció

Legyen $\mathfrak{G}$ provéges Abel csoport. Az Iwasawa-algebrájának hívjuk a

$$\Lambda(\mathfrak{G}) = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathfrak{G}/\mathfrak{H}]$$

kompakt topologikus $\mathbb{Z}_p$-algebrát.

Példa

- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

Iwasawa-algebra

Definíció

Legyen $\mathfrak{G}$ provéges Abel csoport. Az Iwasawa-algebrájának hívjuk a

$$\Lambda(\mathfrak{G}) = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathfrak{G}/\mathfrak{H}]$$

kompakt topologikus $\mathbb{Z}_p$-algebrát.

Példa

- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$
- $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) = \varprojlim \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})/\mathbb{Q}_p) \overset{\chi}{\simeq} \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}_p^\times$

Iwasawa-algebra

Definíció

Legyen $\mathfrak{G}$ provéges Abel csoport. Az Iwasawa-algebrájának hívjuk a

$$\Lambda(\mathfrak{G}) = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathfrak{G}/\mathfrak{H}]$$

kompakt topologikus $\mathbb{Z}_p$-algebrát.

Példa

- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$
- $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) = \varprojlim \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})/\mathbb{Q}_p) \overset{\chi}{\simeq} \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}_p^\times$

Legyen $C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p)$ a folytonos függvények $\mathbb{C}_p$-algebrája, ami $\mathbb{C}_p$-Banach tér az $\|f\| = \sup_{g\in\mathfrak{G}} |f(g)|_p$ normával ellátva.

Definíció

Legyen $\mathfrak{G}$ provéges Abel csoport. Az Iwasawa-algebrájának hívjuk a

$$\Lambda(\mathfrak{G}) = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathfrak{G}/\mathfrak{H}]$$

kompakt topologikus $\mathbb{Z}_p$-algebrát.

Példa

- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$
- $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) = \varprojlim \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})/\mathbb{Q}_p) \overset{\chi}{\simeq} \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}_p^\times$

Legyen $C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p)$ a folytonos függvények $\mathbb{C}_p$-algebrája, ami $\mathbb{C}_p$-Banach tér az $\|f\| = \sup_{g\in\mathfrak{G}} |f(g)|_p$ normával ellátva. Ebben $\mathrm{Step}(\mathfrak{G}) = \{f \in C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p) \colon \exists\, \mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ nyílt, hogy $f(x) = f(y)$, ha $x - y \in \mathfrak{H}\}$ részalgebra mindenhol sűrű.

Definíció

Legyen $\mathfrak{G}$ provéges Abel csoport. Az Iwasawa-algebrájának hívjuk a

$$\Lambda(\mathfrak{G}) = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathfrak{G}/\mathfrak{H}]$$

kompakt topologikus $\mathbb{Z}_p$-algebrát.

Példa

- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$
- $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) = \varprojlim \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})/\mathbb{Q}_p) \overset{\chi}{\simeq} \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}_p^\times$

Legyen $C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p)$ a folytonos függvények $\mathbb{C}_p$-algebrája, ami $\mathbb{C}_p$-Banach tér az $\|f\| = \sup_{g\in\mathfrak{G}} |f(g)|_p$ normával ellátva. Ebben $\mathrm{Step}(\mathfrak{G}) = \{f \in C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p) \colon \exists\, \mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ nyílt, hogy $f(x) = f(y)$, ha $x - y \in \mathfrak{H}\}$ részalgebra mindenhol sűrű. Ezek megfelelnek a $\mathfrak{G}/\mathfrak{H} \to \mathbb{C}_p$ függvényeknek.

p-adikus mértékek, integrálás

Legyen $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{G})$ és $f \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G})$ tetszőleges valamilyen $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ nyílt részcsoporttal. Legyen $\lambda_{\mathfrak{H}} = pr_{\mathfrak{H}}(\lambda)$,

p-adikus mértékek, integrálás

Legyen $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{G})$ és $f \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G})$ tetszőleges valamilyen $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ nyílt részcsoporttal. Legyen $\lambda_{\mathfrak{H}} = pr_{\mathfrak{H}}(\lambda)$,

$$\lambda_{\mathfrak{H}} = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x)x \qquad (c_{\mathfrak{H}}(x) \in \mathbb{Z}_p),$$

p-adikus mértékek, integrálás

Legyen $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{G})$ és $f \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G})$ tetszőleges valamilyen $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ nyílt részcsoporttal. Legyen $\lambda_{\mathfrak{H}} = pr_{\mathfrak{H}}(\lambda)$,

$$\lambda_{\mathfrak{H}} = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x)x \qquad (c_{\mathfrak{H}}(x) \in \mathbb{Z}_p),$$

$$\int_{\mathfrak{G}} f \, d\lambda = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x) f(x).$$

p-adikus mértékek, integrálás

Legyen $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{G})$ és $f \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G})$ tetszőleges valamilyen $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ nyílt részcsoporttal. Legyen $\lambda_{\mathfrak{H}} = pr_{\mathfrak{H}}(\lambda)$,

$$\lambda_{\mathfrak{H}} = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x)x \qquad (c_{\mathfrak{H}}(x) \in \mathbb{Z}_p),$$

$$\int_{\mathfrak{G}} f \, d\lambda = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x)f(x).$$

Tetszőleges $f \in C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p)$ függvényre pedig

$$M_\lambda(f) = \int_{\mathfrak{G}} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{G}} f_n \, d\lambda \qquad (f_n \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G}),\ f_n \to f).$$

p-adikus mértékek, integrálás

Legyen $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{G})$ és $f \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G})$ tetszőleges valamilyen $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ nyílt részcsoporttal. Legyen $\lambda_{\mathfrak{H}} = pr_{\mathfrak{H}}(\lambda)$,

$$\lambda_{\mathfrak{H}} = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x) x \qquad (c_{\mathfrak{H}}(x) \in \mathbb{Z}_p),$$

$$\int_{\mathfrak{G}} f \, d\lambda = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x) f(x).$$

Tetszőleges $f \in C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p)$ függvényre pedig

$$M_\lambda(f) = \int_{\mathfrak{G}} f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{G}} f_n \, d\lambda \qquad (f_n \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G}),\ f_n \to f).$$

Ez egy lineáris funkcionál $C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p)$-n, amire $|M_\lambda(f)|_p \leq \|f\|$ és $M_\lambda(f) \in \mathbb{Q}_p$, ha f $\mathbb{Q}_p$-be képez.

Legyen $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{G})$ és $f \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G})$ tetszőleges valamilyen $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ nyílt részcsoporttal. Legyen $\lambda_{\mathfrak{H}} = pr_{\mathfrak{H}}(\lambda)$,

$$\lambda_{\mathfrak{H}} = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x)x \qquad (c_{\mathfrak{H}}(x) \in \mathbb{Z}_p),$$

$$\int_{\mathfrak{G}} f \, d\lambda = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x) f(x).$$

Tetszőleges $f \in C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p)$ függvényre pedig

$$M_\lambda(f) = \int_{\mathfrak{G}} f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{G}} f_n \, d\lambda \qquad (f_n \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G}),\ f_n \to f).$$

Ez egy lineáris funkcionál $C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p)$-n, amire $|M_\lambda(f)|_p \leq \|f\|$ és $M_\lambda(f) \in \mathbb{Q}_p$, ha f $\mathbb{Q}_p$-be képez. Fontos gondolat: ha L lineáris funkcionál teljesíti ezt a kettőt, akkor $L = M_\lambda$ valamilyen λ-ra.

Legyen $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{G})$ és $f \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G})$ tetszőleges valamilyen $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ nyílt részcsoporttal. Legyen $\lambda_{\mathfrak{H}} = pr_{\mathfrak{H}}(\lambda)$,

$$\lambda_{\mathfrak{H}} = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x)x \qquad (c_{\mathfrak{H}}(x) \in \mathbb{Z}_p),$$

$$\int_{\mathfrak{G}} f\, d\lambda = \sum_{x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}} c_{\mathfrak{H}}(x) f(x).$$

Tetszőleges $f \in C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p)$ függvényre pedig

$$M_\lambda(f) = \int_{\mathfrak{G}} f\, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{G}} f_n\, d\lambda \qquad (f_n \in \mathrm{Step}(\mathfrak{G}),\ f_n \to f).$$

Ez egy lineáris funkcionál $C(\mathfrak{G}, \mathbb{C}_p)$-n, amire $|M_\lambda(f)|_p \leq \|f\|$ és $M_\lambda(f) \in \mathbb{Q}_p$, ha f $\mathbb{Q}_p$-be képez. Fontos gondolat: ha L lineáris funkcionál teljesíti ezt a kettőt, akkor $L = M_\lambda$ valamilyen λ-ra. Illetve ha $M_{\lambda_1} = M_{\lambda_2}$, akkor $\lambda_1 = \lambda_2$.

Mahler transzformált

Tétel

Legyen $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ folytonos függvény. Ekkor f egyértelműen írható

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

alakba, ahol $a_n \in \mathbb{C}_p$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tétel

Legyen $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ folytonos függvény. Ekkor f egyértelműen írható

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

alakba, ahol $a_n \in \mathbb{C}_p$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definíció

A Mahler transzformált a következő $\mathcal{M} : \Lambda(\mathbb{Z}_p) \to R$ leképezés

$$\mathcal{M}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) T^n,$$

ahol $c_n(\lambda) = \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} \, d\lambda$. Ez egy $\mathbb{Z}_p$-algebra izomorfizmus, amire $\mathcal{M}(1_{\mathbb{Z}_p}) = 1 + T$.

Mérték megszorítása

Cél: $\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times) \hookrightarrow \Lambda(\mathbb{Z}_p)$,

Mérték megszorítása

Cél: $\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times) \hookrightarrow \Lambda(\mathbb{Z}_p)$, nehézség: $\mathbb{Z}_p^\times \not\leq \mathbb{Z}_p$.

Mérték megszorítása

Cél: $\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times) \hookrightarrow \Lambda(\mathbb{Z}_p)$, nehézség: $\mathbb{Z}_p^\times \not\leq \mathbb{Z}_p$.
Legyen ε a karakterisztikus függvénye $\mathbb{Z}_p^\times$-nek. Ekkor

$$L(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f \varepsilon \, d\lambda$$

lineáris funkcionál. Létezik $\#(\lambda) \in \Lambda(\mathbb{Z}_p)$, amire $L = M_{\#(\lambda)}$.

Mérték megszorítása

Cél: $\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times) \hookrightarrow \Lambda(\mathbb{Z}_p)$, nehézség: $\mathbb{Z}_p^\times \not\leq \mathbb{Z}_p$.
Legyen ε a karakterisztikus függvénye $\mathbb{Z}_p^\times$-nek. Ekkor

$$L(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f\varepsilon \, d\lambda$$

lineáris funkcionál. Létezik $\#(\lambda) \in \Lambda(\mathbb{Z}_p)$, amire $L = M_{\#(\lambda)}$.

Lemma

$\#(\lambda) = \lambda$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{M}(\lambda) \in R^{\psi=0}$.

Mérték megszorítása

Cél: $\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times) \hookrightarrow \Lambda(\mathbb{Z}_p)$, nehézség: $\mathbb{Z}_p^\times \not\leq \mathbb{Z}_p$.
Legyen ε a karakterisztikus függvénye $\mathbb{Z}_p^\times$-nek. Ekkor

$$L(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f\varepsilon \, d\lambda$$

lineáris funkcionál. Létezik $\#(\lambda) \in \Lambda(\mathbb{Z}_p)$, amire $L = M_{\#(\lambda)}$.

Lemma

$\#(\lambda) = \lambda$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{M}(\lambda) \in R^{\psi=0}$.

$$i : \Lambda(\mathbb{Z}_p^\times) \to \Lambda(\mathbb{Z}_p) \quad \int_{\mathbb{Z}_p} f \, d(i(\eta)) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} f|_{\mathbb{Z}_p^\times} \, d\eta$$

Mérték megszorítása

Cél: $\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times) \hookrightarrow \Lambda(\mathbb{Z}_p)$, nehézség: $\mathbb{Z}_p^\times \not\leq \mathbb{Z}_p$.
Legyen ε a karakterisztikus függvénye $\mathbb{Z}_p^\times$-nek. Ekkor

$$L(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f\varepsilon\, d\lambda$$

lineáris funkcionál. Létezik $\#(\lambda) \in \Lambda(\mathbb{Z}_p)$, amire $L = M_{\#(\lambda)}$.

Lemma

$\#(\lambda) = \lambda$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{M}(\lambda) \in R^{\psi=0}$.

$$i : \Lambda(\mathbb{Z}_p^\times) \to \Lambda(\mathbb{Z}_p) \qquad \int_{\mathbb{Z}_p} f\, d(i(\eta)) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} f|_{\mathbb{Z}_p^\times}\, d\eta$$

Lemma

Teljesül $i(\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times)) = \{\lambda \in \Lambda(\mathbb{Z}_p) \ : \ \#(\lambda) = \lambda\}$. Speciálisan ezért $\mathcal{M}(i(\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times))) = R^{\psi=0}$.

Egzakt sorozat II.

$\mathcal{G}$-nek a $g \cdot a = \chi(g) \cdot a$ ($a \in \mathbb{Z}_p$) képlettel definiált hatása kiterjed $\Lambda(\mathbb{Z}_p)$-re.

Egzakt sorozat II.

$\mathcal{G}$-nek a $g \cdot a = \chi(g) \cdot a$ ($a \in \mathbb{Z}_p$) képlettel definiált hatása kiterjed $\Lambda(\mathbb{Z}_p)$-re. $\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times)$ egy $\mathcal{G}$-részmodulus, $\mathcal{M}$ pedig $\mathcal{G}$-izomorfizmus $\Lambda(\mathbb{Z}_p)$ és R között.

Egzakt sorozat II.

$\mathcal{G}$-nek a $g \cdot a = \chi(g) \cdot a$ $(a \in \mathbb{Z}_p)$ képlettel definiált hatása kiterjed $\Lambda(\mathbb{Z}_p)$-re. $\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times)$ egy $\mathcal{G}$-részmodulus, $\mathcal{M}$ pedig $\mathcal{G}$-izomorfizmus $\Lambda(\mathbb{Z}_p)$ és R között. $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \circ \tilde{\chi} : \Lambda(\mathcal{G}) \simeq R^{\psi=0}$, ahol $\tilde{\chi} : \Lambda(\mathcal{G}) \simeq \Lambda(\mathbb{Z}_p^\times)$.

Egzakt sorozat II.

$\mathcal{G}$-nek a $g \cdot a = \chi(g) \cdot a$ $(a \in \mathbb{Z}_p)$ képlettel definiált hatása kiterjed $\Lambda(\mathbb{Z}_p)$-re. $\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times)$ egy $\mathcal{G}$-részmodulus, $\mathcal{M}$ pedig $\mathcal{G}$-izomorfizmus $\Lambda(\mathbb{Z}_p)$ és R között. $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \circ \tilde{\chi} : \Lambda(\mathcal{G}) \simeq R^{\psi=0}$, ahol $\tilde{\chi} : \Lambda(\mathcal{G}) \simeq \Lambda(\mathbb{Z}_p^\times)$.

$$\tilde{\mathcal{L}} : \mathcal{U}_\infty \to \Lambda(\mathcal{G}), \qquad \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{u}) = \tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\mathcal{L}(f_{\mathbf{u}}))$$

Egzakt sorozat II.

$\mathcal{G}$-nek a $g \cdot a = \chi(g) \cdot a$ $(a \in \mathbb{Z}_p)$ képlettel definiált hatása kiterjed $\Lambda(\mathbb{Z}_p)$-re. $\Lambda(\mathbb{Z}_p^\times)$ egy $\mathcal{G}$-részmodulus, $\mathcal{M}$ pedig $\mathcal{G}$-izomorfizmus $\Lambda(\mathbb{Z}_p)$ és R között. $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \circ \tilde{\chi} : \Lambda(\mathcal{G}) \simeq R^{\psi=0}$, ahol $\tilde{\chi} : \Lambda(\mathcal{G}) \simeq \Lambda(\mathbb{Z}_p^\times)$.

$$\tilde{\mathcal{L}} : \mathcal{U}_\infty \to \Lambda(\mathcal{G}), \qquad \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{u}) = \tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\mathcal{L}(f_{\mathbf{u}}))$$

Tétel

Egzakt sorozata $\mathcal{G}$-modulusoknak a következő:

$$0 \longrightarrow \mu_{p-1} \times T_p(\mu) \longrightarrow \mathcal{U}_\infty \xrightarrow{\tilde{\mathcal{L}}} \Lambda(\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta} T_p(\mu) \longrightarrow 0,$$

ahol $T_p(\mu) = \varprojlim \mu_{p^{n+1}}$. A baloldali leképezés a természetes beágyazás, ami egy $(x, a) \in \mu_{p-1} \times T_p(\mu)$ párhoz $xa \in \mathcal{U}_\infty$-t rendeli. A β leképezést pedig a $\beta(\lambda) = (\zeta_n)^{\int_{\mathcal{G}} \chi d\lambda}$ képlet adja.

Hivatkozások

J. Coates and R. Sujatha.
Cyclotomic Fields and Zeta Values.
Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.