Extremális gráfok véges geometriai konstrukciói

Stadler Domonkos

Témavezető: Kiss György

1. Bevezetés

Az extremális gráfelméletben egy ismert téma a cage-ek vizsgálata. (k, g)-gráfnak k-reguláris, g bőségű gráfokat nevezünk. Azokat a (k, g)-gráfokat nevezzük cage-nek, amelyek adott k, g paraméterekre minimális csúcsszámúak. Ezek a gráfok nagyon gyakran geometriai struktúrák illeszkedési gráfjai vagy azkból előállíthatóak ügyes manipuláció segítségével. A kutatómunka célja (k, g)-gráfokkal kapcsolatos ismert eredmények megismerése és az alacsony csúcsszámú gráfok konstrukciójának megértése volt. Ezen belül a végcél $g = 11$-bőségű gráfokat konstruálni általánosított hatszögek illeszkedési gráfjaiból.

1.1. Mit vizsgáltam

A kutatómunka során többségében olyan cikkekkel foglalkoztam, amelyek (k, g)-gráfok konstrukcióiról szólnak. Ehhez szükségem volt a projektív geometriai ismereteim felfrissítésére, a témához rendkívül hasznos megérteni véges projektív terek másodrendű felületeinek a struktúráját. Ebben a témában főleg tankönyvből dolgoztam, illetve specifikus geometriai struktúráknak cikkek segítségével néztem utána.

2. Ismert eredmények

2.1. Alapvető definíciók

Egy $G(V, E)$ gráf k-reguláris, ha minden csúcsának a foka k. A gráf bőségének a legrövidebb kör hosszát nevezzük. Egy (k, g)-cage csúcsszámát $n(k, g)$-vel jelölöm, azaz ez a minimális csúcsszám, amin megfelelő gráf felvehető. $M(k, g)$-vel jelöljük a Moore-korlátot, ami egy alsó korlát a csúcsszámra, azaz $M(k, g) \leq n(k, g)$. Egyenlőség esetén a megfelelő gráfokat Moore-gráfoknak nevezzük [2].

2.1. Tétel. *A Moore-korlát képlete a következő:*

$$n(k,g) \geq M(k,g) = \begin{cases} 1 + k + k(k-1) + .. + k(k-1)^{\frac{g-1}{2}-1}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ 2\left(1 + (k-1) + (k-1)^2 + ... + (k-1)^{\frac{g}{2}-1}\right), & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases} \tag{1}$$

Bizonyítás. Az állítás egyszerűen kijön, ha megpróbáljuk összeszámolni a csúcsokat. Mivel a körök nem lehetnek egy korlátnál kisebbek, legfeljebb $\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$ sugarú gömbben lokálisan fának tűnik minden (k, g)-gráf. Páratlan k esetén vegyünk egy rögzített csúcsot, és nézzük meg, az ő környezetében hogy néz ki a gráf. Minden csúcsnak k szomszédja van, tehát megkapjuk a fenti képletet. Az összeszámolt csúcsok mind különbözőek kell, hogy legyenek, hiszen a gráf bősége g, és ennél csak rövidebb utakat látunk.

A bizonyítás hasonlóan megy páros k-ra, ebben az esetben egy élből indulunk ki, és a két végén szimmetrikusan építjük a gráfot. □

Néhány egyszerűbb példa Moore-gráfokra, ezek mindig léteznek:

- $k = 2$; $M(2, g) = g$, ezt C_g azaz a g hosszú kör kielégíti.
- $g = 3$; $M(k, 3) = k + 1$, ezek teljes gráfok, azaz K_{k+1}.
- $g = 4$; $M(k, 4) = 2k$, a teljes páros gráfok, azaz $K_{k,k}$.
- $M(3, 5) = 10$, a jól ismert Petersen-gráf.

Ezek elég egyszerűnek tűnnek, de tetszőleges paraméterű Moore-gráfok létezése nem magától értetődő, mint az a következő eredményből jól látszik.

2.2. Tétel. *(Hoffman-Singleton, 1960) Ha G egy Moore-gráf $(k, 5)$ paraméterekkel, akkor k csak $2, 3, 7$ vagy 57 lehet.*

Már említettem, hogy $k = 2, 3$ esetén az ötszögről illetve a Petersen-gráfról van szó. $k = 7$-et az úgynevezett Hoffman-Singleton gráf elégíti ki, amelynek 50 csúcsa van. Az, hogy létezik-e $(57, 5)$ Moore-gráf ($57^2 + 1$ csúccsal), megoldatlan probléma.

2.3. Tétel. *Ha $g > 5$ páratlan és $k > 2$, akkor nem létezik (k, g) Moore-gráf.*

2.2. Általánosított sokszögek

A cél, hogy minél kisebb (k, g)-gráfokat találjunk. Mivel ezek általában rendkívül szimmetrikusak, segítségünkre válik, ha absztrakt geometriai struktúrákat használunk a konstrukcióikhoz. Véges rendű projektív terek és általánosított sokszögek struktúráját szokták általában használni valamilyen módon.

Általánosított sokszögek. Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy véges, pont-egyenes struktúra, ahol $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset$, $I \subset (\mathcal{P} \times \mathcal{L}) \cup (\mathcal{L} \times \mathcal{P})$. $\mathcal{P}$ elemeit pontoknak hívjuk, $\mathcal{L}$ elemeit egyeneseknek, I az illeszkezés, egy szimmetrikus reláció.

Egy ilyen struktúra illeszkedési gráfjában a csúcsok a pontok és egyenesek halmazának uniója, két csúcs között akkor megy él, ha a sokszögben illeszkednek. Ha $x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, a két elem távolsága $d(x, y)$ pont az illeszkedési gráfbeli távolságuk.

2.4. Definícó. Egy ilyen illeszkedési geometria általánosított n-szög, ha

GN1. $d(x, y) \leq n \; \forall x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$.

GN2. Ha $d(x, y) = l < n$, akkor egyértelmű út van köztük.

GN3. $\forall x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \; \exists y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ hogy $d(x, y) = n$.

A *vastagság* axiómáját is mindig elvárjuk, ami azt jelenti, hogy az általánosított sokszög illeszkedési gráfjában minden csúcs foka legalább 3.

A vastag általánosított sokszögek néhány jól ismert tulajdonsága:

- Minden pont ugyanannyi, $s + 1$ egyenesre illeszkedik és minden egyenesen ugyanannyi, $t + 1$ pont van. Ekkor a sokszög rendje (s, t).

  Itt csak olyanokról lesz szó, ahol a két érték megegyezik, q-val fogom jelölni.

- Két pont illetve két egyenes távolsága mindig páros, egy pont és egy egyenes távolsága mindig páratlan. Ebből következik, hogy az illeszkedési gráf csak páros gráf lehet, ugyanis csak egy pontból és egy egyenesből származó csúcs között mehet él.

- Egy (s, t) rendű általánosított sokszög duálisa egy (t, s) rendű általánosított sokszög.

- (q, q) rendű általánosított sokszögek csak $n = 3, 4, 6$-ra léteznek, az ilyen általánosított háromszögek pontosan a projektív síkok. Ilyen struktúrák mindig léteznek, ha q prímhatvány.

- Az általánosított sokszög illeszkedési, másnéven Levi-gráfja egy összefüggő páros gráf n átmérővel és $2n$ bőséggel. Amennyiben a sokszög rendje (q, q), a gráf $q + 1$-reguláris.

A következő tételekből mingyárt látszik is, miért olyan fontosak ezek a struktúrák a (k, g)- és Moore-gráfok vizsgálatához:

2.5. Tétel. *Pontosan akkor létezik Moore-gráf* $(k, 6)$ *paraméterekkel, tehát* $2(1+(k-1)+(k-1)^2)$ *csúccsal, ha létezik* $(k-1)$*-edrendű projektív sík. Ekkor a Moore gráf a sík illeszkedési gráfja.*

2.6. Tétel. *Páros g>6 és k>2 esetén* (k, g) *Moore-gráf csak* $g = 8, 12$ *esetén léteznek. Ezek általánosított négy- és hatszögek illeszkedési gráfjai.*

3. Konstrukciók (k,g)-gráfokra

A továbbiakban arról lesz szó, milyen módon lehet (k,g) gráfokat konstruálni általánosított sokszögekből [1]. Amikor egy általánosított sokszög illeszkedési gráfjáról beszélünk, a csúcsokat lehet pontoknak vagy egyeneseknek hívni aszerint, hogy a sokszögben milyen szerepük volt.

3.1. t-jó struktúrák

3.1. Definícó. Egy általánosított sokszögbeli t-jó struktúra egy $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ pár, ahol $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ és $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$. Továbbá minden $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$-beli ponton t darab $\mathcal{L}_0$-beli egyenes megy át, és fordítva, azaz minden $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$-beli egyenesen t darab $\mathcal{P}_0$-beli pont van.

Könnyen látható, hogy egy t-jó struktúrában $|\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0|$, ezt jelöljük $|\mathcal{T}|$-vel. Ez a definíció nagyon hasznos, hiszen ha egy (q, q) rendű általánosított n-szögben találunk egy t-jó struktúrát, az incidenciagráfból T törlésével egy $(q + 1 - t)$-reguláris gráfot kapunk, amiben nem keletkezhettek új körök, azaz a bősége legfeljebb $2n$ marad. Triviálisan, minél nagyobb t-re találunk ilyet, annál kisebb lesz a végeredményül kapott gráf csúcsszáma, amivel jobban tudunk közelíteni ahhoz, hogy cage-et találjunk.

Adok egy módszert t-jó struktúrák konstrukciójára, a legtöbb ismert péda előállítható így: Legyen $\mathcal{L}^* = \{l_1, ..., l_t\}$, $\mathcal{P}^* = \{P_1, ..., P_t\}$ $t - t$ darab különböző pont és egyenes úgy, hogy minden $1 \leq i < j \leq t$ esetén teljesül, hogy

- $d(l_i, l_j) = 2 = d(P_i, P_j)$, azaz páronként metszenek az egyenesek és páronként kollineárisak a pontok.
- l_i és l_j egyértelmű metszéspontja $\mathcal{P}^*$-beli, P_i és P_j egyértelmű összekötő egyenese $\mathcal{L}^*$-beli.

Ha $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ megfelel a ezeknek a feltételeknek, legyen $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ azon pontok és egyenesek halmaza, amelyek legfeljebb $(n - 2)$ távolságra vannak $\mathcal{P}^*$ vagy $\mathcal{L}^*$ egy valamelyik elemétől. Másképp megfogalmazva $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ $n - 2$ méretű környezetét vesszük. Ekkor t-jó struktúrát kapunk.

3.1.1. Az alkalmazásról

Ennek a módszernek a segítségével aránylag könnyű t-jó struktúrákat elképzelni egy projektív síkon, ahol $n - 2 = 1$. A második tulajdonság miatt $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ egy úgynevezett *degenerált részsík* kell, hogy legyen, ezeknek két fajtája van:

π_1 (P, l) egy illeszkedő pont-egyenes pár, $\mathcal{P}^*$ minden eleme l-en van, $\mathcal{L}^*$ minden eleme P-n megy át.

π_2 (P, l) egy nem illeszkedő pont-egyenes pár, P kivételével minden $\mathcal{P}^*$-beli pont l-en van és l kivételével minden $\mathcal{L}^*$-beli egyenes átmegy P-n.

Ekkor a $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ pár 1-környezete megfelelő.

Hasonló kostrukciókat általánosított négy- és hatszögekben is lehet képezni. Ha a π_1 esethez analóg módon járunk el, $tq^{n-2} + q^{n-3} + ... + q + 1$ méretű t-jó struktúrát kaphatunk.

Ha $t = 1$, $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ egy-egy elemmel rendelkezik, automatikusan megfelelőek. Ha nem illeszkednek, a projektív síkbeli (π_2 esethez hasonlót kapunk. Ilyenkor egy $q^{n-2} + 2q^{n-3} + q^{n-4} + ... + q + 1$ méretű 1-jó struktúrát kapunk, és ez nagyobb, mintha az előző módon konstruálnánk.

3.2. Páratlan bőségű (k,g)-gráfok konstrukciója

Tudjuk, hogy páratlan $g > 5$-re nincsenek Moore-gráfok, de mégis szeretnénk konstruálni minél kisebb (k, g)-gráfokat ebben az esetben is. A megoldás [3] az, hogy egy páros bőségű struktúrából kiindulva próbálunk gyártani kisebb gráfokat. Általában valamilyen részgráfot törlünk, majd okosan veszünk egy párosítást azokon a csúcsokon, amelyek veszítettek a fokszámukból.

3.2. Definícó. Legyen $G = (V, E)$ egy általánosított négyszög illeszkedési gráfjának t-reguláris feszítőrészgráfja. Ekkor $W \subset V$ egy *törölhető* részhalmaza a csúcsoknak, ha minden $v \in V$-re igaz: Ha v csúcs legalább kettő G-beli szomszédja W-ben van, akkor az összes szomszédja és v is W-ben van.

Megjegyzem, hogy G gyakran az egész illeszkedési gráf.
Legyen G' a $V \setminus W$ csúcsok által meghatározott részgráf G-ben. Ekkor minden csúcs foka legfeljebb eggyel csökkent, azaz $t-1$ vagy t. Ha t páratlan, ekkor létezik a $t-1$ fokú csúcsoknak olyan teljes párosítása, ahol két összekötött csúcs a négyszögben két kollineáris pont (egy törölt egyenesen) vagy két metsző egyenes (egy törölt ponton keresztül).

Enek a módszernek a használatával konstruáltak $(k, 7)$ gráfokat. A módszer a következő: találni kell egy megfelelő törölhető csúcshalmazt, venni kell egy specifikus párosítást, majd meg kell mutatni, hogy a kapott gráf bősége legfeljebb (vagy) pontosan eggyel csökkent. Ez egy nagyon fontos lépés, mivel ha berajzolunk új éleket, keletkezhetnek túl rövid új körök. Általánosított négyszögekben például egy négyzetháló, azaz két, páronként nem metsző egyenescsalád tud törölhető halmaz lenni. Ilyenkor csak az egyik egyenescsaládot helyettesítjük szakaszokkal minden két metszéspont között.

3.2.1. (k,11) gráf konstrukciója

A kutatómonka végcélja a korábban bemutatott módszerekkel analóg módon egy általánosított hatszög Levi-gráfjának átalakításával $(k, 11)$-gráf készítése. Ehhez a lehető legkisebb általánosított hatszöget vizsgáltam [4]. Ez az úgynevezett $H(2)$, egy $(2, 2)$ rendű hatszög 63 ponttal és egyenessel, azaz a Levi-gráfja 126 csúcsú és 3-reguláris.

A hatszög belső struktúrája a hatdimenziós másodrendű projektív térből $PG(6, 2)$ származik, a pontok és egyenesek ennek részhalmazai, de inkább adok egy könnyebben átlátható leírást.

Vegyük a Fano-sík, azaz $PG(2, 2)$ struktúráját. Legyenek $H(2)$ pontjai a Fano-sík pontjai, egyenesei és pont-egyenes párjai $7 + 7 + 49 = 63$. Legyenek az egyenesek kétféle alakúak: $\{P, l, (P, l)\}$ ahol P, l egymásra illeszkedő pont-egyenes pár a Fano-síkon illetve $\{(P, l), (Q_1, e_1), (Q_1, e_2)\}$ ahol (P, l) egy illeszkedő pont-egyenes pár, Q_1, Q_2 l-en lévő pontok és e_1, e_2 P-n átmenő egyenesek a Fano-síkban $7 * 3 + 2(7 * 3) = 63$.

A kezdeti cél egy törölhető halmazhoz hasonló részgráf keresése, egyelőre nem jártam sikerrel.

Hivatkozások

[1] Gábor Damásdi, Tamás Héger, and Tamás Szőnyi. The zarankiewicz problem, cages, and geometries. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Mathematica*, 56(1):3–37, 2013.

[2] Kiss Gy. Moore gráfok és véges geometriák. előadás, KöMaL ankét.

[3] György Kiss. Geometric constructions of small regular graphs with girth 7. *arXiv preprint arXiv:2312.05620*, 2023.

[4] Hendrik Van Maldeghem. Generalized polygons in projective spaces. In *Proceedings of the Academy Contact Forum 'Generalized Polygons*, volume 20, pages 173–200. Citeseer, 2000.