Fuzzy gráfok

Kola László
Témavezető: Figula Ágota

1. Bevezetés

Ebben a beszámolóban egy viszonylag fiatal ágáról lesz szó a matematikának: a fuzzy matematikáról. A témakörnek a legfontosabb fogalmai, amit mi tárgyalunk, a 60-as és 70-es években keletkeztek. Az első írást L. A Zadeh készítette "Fuzzy Sets" néven 1965-ben. Ezen konstrukcióval próbált megragadni egy bizonyos határozatlanságot. Ez a határozatlanság fakadhat a nyelv hiányosságaiból, az input információ hiányából vagy a modellezésből. Ezen terület egy részterületét vizsgáljuk: a fuzzy gráfelméletet. Itt az alapfogalmakon lesz a hangsúly és a hozzájuk fűződő legfontosabb tételen. Továbbá próbálunk párhuzamot húzni a nemfuzzy és fuzzy gráfok között. Ebben a dolgozatban a '**Fuzzy Mathematics: An Introduction for Engineers and Scientist**' című forrás lesz felhasználva, azon belül 1-29 oldalakat dolgozzuk fel.

2. Szükséges fogalmak

Gondoljuk végig, hogy mik kellenek egy gráf fogalom elkészítéséhez: kell egy csúcshalmaz; élhalmaz; és egy reláció, mely megmondja, hogy mely csúcsok vannak összekötve. Először is vezessük be a fuzzy halmaz fogalmát, mert ez a legfontosabb fogalom ezen a területen:

2.1. Definíció. Legyen $X \neq \emptyset$ egy halmaz. Ekkor az

$$\tilde{A} := \{(x, \tilde{A}(x)) | x \in X\}$$

rendezett párok halmazát X-nek a fuzzy részhalmazának nevezzük, ahol $\tilde{A} : X \to [0, 1]$ leképezést tagsági függvénynek, az X-beli elemekhez rendelt értéket tagsági foknak nevezzük.

Ha a tagsági függvény csak a 0 vagy 1 értékeket veszi fel, akkor nemfuzzy halmazról beszélünk. Minden halmaz azonosítható egy nemfuzzy halmazzal a következőképpen: $x \in A \iff \tilde{A}(x) = 1$ és $x \notin A \iff \tilde{A}(x) = 0$. Tehát a továbbiakban nemfuzzy halmaznak nevezzük az általunk jól ismert halmazokat.

Dolgozzunk a gráf fogalma felé! Olyan gráfokat szeretnénk vizsgálni, ahol csak az élekhez rendelünk $]0, 1]$-beli tagsági fokot. A csúcsokat vehetjük egy véges nemfuzzy halmazból, de az éleket egy fuzzy halmazból vennénk. Már csak a reláció maradt:

2.2. Definíció. Legyenek X és Y halmazok. Azt mondjuk, hogy $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-ből Y-ba, ha fuzzy részhalmaza $X \times Y$-nak.

Ha $X = Y$, akkor azt mondjuk, hogy $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-n. Tulajdonképpen az élhalmazt és a relációt tudjuk egyesíteni, mivel a fuzzy reláció arról is szolgáltat információt, hogy milyen tagsági fokot rendelünk az élekhez. Nyilvánvalóbb lesz ez, ha véges halmazok esetén felírjuk az úgynevezett mátrixreprezentánsát, amire nézünk is egy példát. Legyen $X := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ halmaz, amin értelmezzünk egy $\tilde{R}$ fuzzy relációt a következőképpen:

$$\tilde{R} : \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

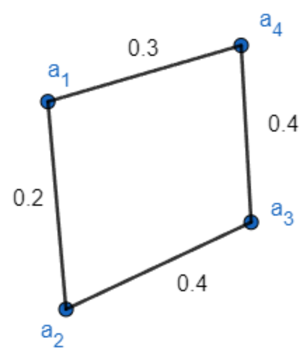
Itt a mátrix i.-edik sorának j.-adik eleme $\tilde{R}(a_i, a_j)$.

3. Fuzzy gráfok fogalma

Minden készen áll, hogy tudjuk definiálni a fuzzy gráfokat:

3.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $G = (X, \tilde{R})$ pár egy fuzzy gráf, ha X egy halmaz és $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-n. Az X halmazt és az $\tilde{R}$ fuzzy relációt rendre csúcshalmaznak és fuzzy élhalmaznak nevezzük. Ha az X halmaz véges, akkor véges fuzzy gráfról beszélünk. Az élekhez rendelt tagsági fokot az él erősségének nevezzük.

Egy véges fuzzy gráfot megadhatunk a fuzzy reláció mátrixával is. Példaként a fenti mátrixból a következő véges fuzzy gráfot tudjuk kirajzolni:



1. ábra.

A továbbiakban véges fuzzy gráfokat vizsgálunk; ezen belül irányítatlan, hurokélmentes fuzzy gráfokkal foglalkozunk. Az általunk ismert gráfok esetéből természetesen lehet általánosítani ezeket a fogalmakat:

3.2. Definíció. Legyen $G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy gráf.

1. Azt mondjuk, hogy G egy irányítatlan fuzzy gráf, ha $\forall x, y \in X : \tilde{R}(x, y) = \tilde{R}(y, x)$.
2. Azt mondjuk, hogy G egy hurokélmentes fuzzy gráf, ha $\forall x \in X : \tilde{R}(x, x) = 0$.

Ha egy gráf irányítatlan, akkor azt mondjuk, hogy $\tilde{R}$ egy szimmetrikus fuzzy reláció. Ha egy gráf hurokélmentes, akkor azt mondjuk, hogy $\tilde{R}$ egy irreflexív fuzzy reláció. Most definiáljuk a fuzzy gráfok részgráfjait, amit ugyanúgy természetesen tudjuk általánosítani:

3.3. Definíció. Legyenek X és Y véges halmazok, $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-n, $\tilde{T}$ fuzzy reláció Y-n. Azt mondjuk, hogy a $H = (Y, \tilde{T})$ fuzzy gráf parciális fuzzy részgráfja a $G = (X, \tilde{R})$ fuzzy gráfnak, ha $Y \subseteq X$ és $\tilde{T} \subseteq \tilde{R}$.

Ha tekintsük azt a fuzzy gráfot, amiben minden él erőssége 0.5, akkor úgy is kaphatunk parciális fuzzy részgráfot, ha az egyik él erősségét 0.4-re állítjuk. Emiatt a fuzzy részgráf fogalmat erősítenünk kell aszerint, hogy csak csúcs- vagy éltörléssel kapjunk fuzzy részgráfot:

3.4. Definíció. Legyenek X és Y véges halmazok, $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-n, $\tilde{T}$ fuzzy reláció Y-n. Azt mondjuk, hogy a $H = (Y, \tilde{T})$ fuzzy gráf az Y által indukált fuzzy részgráfja a $G = (X, \tilde{R})$ fuzzy gráfnak, ha $Y \subseteq X$ és $\tilde{T} = \tilde{R}$.

4. Út és összefüggőség

Fuzzy gráfokban az utat, kört és az utak hosszát ugyanúgy tudjuk definiálni, mint nemfuzzy gráfok esetében. Érdemes definiálni az utak erősségét az út éleinek erősségeiből:

4.1. Definíció. Legyen $G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy gráf. $\rho := (x_0 x_1 ... x_{n-1} x_n)$ egy n hosszú út. A ρ út erőssége

$$\min_{i=1,...,n} \tilde{R}(x_{i-1}, x_i)$$

Definiálnunk kell egy metrikát a csúcshalmazon, amit meg is teszünk:

4.2. Definíció. Legyen $G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy gráf. Bármely $\rho = (x_0, x_1, ..., x_n)$ esetén definiáljuk ρ $\tilde{R}$-hosszát a következőképpen:

$$l(\rho) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tilde{R}(x_{i-1}, x_i)}$$

Továbbá $n = 0 \iff l(\rho) = 0$. Definiáljuk a ρ $\tilde{R}$-távolságát a következőképpen:

$$\delta(x, y) := \min\{l(\rho) : \rho \text{ egy út x és y között}\}$$

Továbbá ha nem létezik ρ út x és y között $\iff \delta(x, y) := \infty$.

4.1. Állítás. *Legyen X egy véges halmaz, $\tilde{R}$ egy szimmetrikus fuzzy reláció X-n. Ekkor a δ függvény egy metrika X-n.*

Természetesebb lenne úgy definiálni az x és y csúcsok távolságot, hogy a közöttük lévő legrövidebb legerősebb út. Ez azt jelenti, hogy a legrövidebb utak közül a legerősebb. Viszont ez nem teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Most térjünk át az összefüggőségre. Ehhez be kell vezetnünk egy fuzzy relációk kompozícióját, hatványát és ∞-edik hatványát:

4.3. Definíció. Legyenek X,Y,Z halmazok, $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-ből Y-be, $\tilde{Q}$ fuzzy reláció Y-ból Z-be. Ekkor $\tilde{R} \circ \tilde{Q}$ egy fuzzy reláció X-ből Z-be, ami a következőképpen van definiálva:

$$\forall (x, z) \in X \times Z : (\tilde{R} \circ \tilde{Q})(x, z) = \max_{y \in Y} \min\{\tilde{R}(x, y), \tilde{Q}(y, z)\}$$

Ezt a relációt $\tilde{R}$ és $\tilde{Q}$ kompozíciójának nevezzük.

4.2. Állítás. *A kompozícióképzés asszociatív.*

4.4. Definíció. Legyen X halmaz, $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-n. Ekkor értelmezzük a $\tilde{R}$ fuzzy reláció hatványait a következőképpen:

$$\tilde{R}^2(x,y) := (\tilde{R} \circ \tilde{R})(x,y), \quad \tilde{R}^{k+1}(x,y) := (\tilde{R}^k \circ \tilde{R})(x,y) \quad (k \geq 2), \; \tilde{R}^\infty(x,y) := \sup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{R}^k(x,y)$$

Fuzzy relációk kompozíciója véges halmazok felett éppen a mátrixszorzást adja vissza, ahol az összeadás a maximum-, a szorzás a minimumfüggvény. Tehát érdemes felírni a mátrixreprezentánsaikat és így összekomponálni a fuzzy relációkat. Egy fuzzy reláció ∞-edik hatványa éppen a legnagyobb értékű hatványreláció lesz.

Az összefüggőséget egy relációként vezetjük be a csúcsok között:

4.5. Definíció. Legyen $G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy gráf. Azt mondjuk, hogy az $x, y \in X$ csúcsok össze vannak kötve, ha vezet közöttük út.

4.3. Állítás. *Az előbb bevezetett reláció egy ekvivalenciareláció, amelynek osztályait összefüggőségi komponenseknek nevezzük.*

4.4. Állítás. *Az x és y csúcs pontosan akkor van összekötve, ha $\tilde{R}^\infty(x,y) > 0$.*

A bizonyítás során azt kell vizsgálni, hogy az utak erőssége hogyan változik, ha a fuzzy relációt hatványozzuk. Ezek alapján tudjuk definiálni az összefüggő fuzzy gráfot:

4.6. Definíció. Egy $G = (X, \tilde{R})$ fuzzy gráf összefüggő, ha minden csúcsából minden másik csúcsba vezet út, azaz $\forall x, y \in X, x \neq y : \tilde{R}^\infty(x,y) > 0$.

Egy fuzzy gráfot definiáló fuzzy relációjának ∞-edik hatványa azt mondja meg, hogy van-e út két csúcs között. Egy fontos tétel a kézfogási tétel, amit lehet általánosítani fuzzy gráfokra is. Ehhez először definiálnunk kell csúcsok fokait:

4.7. Definíció. Legyen $G = (X, \tilde{R})$ fuzzy gráf. Ekkor az $x \in X$ csúcs foka a következő:

$$d(x) := \sum_{y \neq x} \tilde{R}(x,y)$$

4.1. Tétel (Kézfogási tétel fuzzy gráfokra)**.** *Legyen X véges halmaz, $\tilde{R}$ egy szimmetrikus fuzzy reláció X-n, és $G = (X, \tilde{R})$ fuzzy gráf. Ekkor*

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{(x,y) \in X^2 : x \neq y} \tilde{R}(x,y)$$

A bizonyításhoz azt kell észrevennünk, hogy nemfuzzy gráfokban az éleket kell összeszámolni, hogy megkapjuk a fokok összegét. Továbbá mivel irányítatlan gráfban számoltunk, ezért minden élt kétszer kaptunk. A hurokéleket kihagytuk.

5. Hidak

Tekintsünk egy fuzzy gráfot és töröljünk egy élt. Feltehetjük azt a kérdést, hogy mi történik a fuzzy gráfban lévő utak erősségével. Elképzelhető, hogy egyes élek törlése nem igazán befolyásolná a fuzzy gráfot, de létezhetnek olyan élek is, melyek gyengítenék a fuzzy gráfok összes útját. Ezt úgy érdemes elképzelni, hogy egy házban kiveszünk egy tartóelemet, és mennyire befolyásolja a ház stabilitását. Nevezzük hidaknak azon tartóelemeket, melyek gyengítik a ház stabilitását kivételük után. Precízebben:

5.1. Definíció. Legyen $G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy gráf, és x,y két diszjunkt csúcsok. Legyen $G' = (X, \tilde{R}')$ az a fuzzy gráf, melyet úgy kapunk, hogy töröljük az (x, y) élt. Azt mondjuk, hogy (x, y) egy híd G-ben, ha $\exists u, v \in X : \tilde{R}'^{\infty}(u, v) < \tilde{R}^{\infty}(u, v)$.

A következő állítás egy egyszerű átfogalmazása a definíciónak:

5.1. Állítás. *(x, y) pontosan akkor egy híd, ha léteznek olyan u,v csúcsok, hogy a közöttük lévő legerősebb útjainak egy éle (x, y).*

A következő egyszerű tétel ekvivalens feltételeket mond a hidakra:

5.1. Tétel. *$G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy gráf, és x,y két csúcs. Ekkor a következő ekvivalensek:*

1. *(x, y) egy híd G-ben*
2. *bármely G-beli körnek (x, y) nem a leggyengébb éle*
3. *$\tilde{R}'^{\infty}(x, y) < \tilde{R}(x, y)$*

Bizonyítás.

1. → 2.: Indirekten tegyük fel, hogy létezik olyan G-beli kör, melynek leggyengébb éle (x, y). Ekkor létezik olyan út x és y között, melynek erőssége nem változik, ha töröljük az (x, y) élt. Azaz, nem léteznek olyan csúcsok, melyek között (x, y) a legerősebb út, ami ellentmondás.

2. → 3.: Indirekten tegyük fel, hogy $\tilde{R}'^{\infty}(x, y) \geq \tilde{R}^{\infty}(x, y)$. Ekkor létezik olyan út x és y között G'-ben, amelynek az erőssége $\geq \tilde{R}(x, y)$. Ez az út (x, y) éllel együtt egy kört alkot, ahol (x, y) a leggyengébb él., ami ellentmondás.

3. → 1.: Ha (x, y) nem egy híd, akkor $\tilde{R}'^{\infty}(x, y) = \tilde{R}^{\infty}(x, y) \geq \tilde{R}(x, y)$, ami ellentmondás.

□

A bizonyítás megtalálható a felhasznált forrásunk 26. oldalán. A 3. feltétel azt mondja ki, hogy az (x, y) híd az x és y csúcsok közötti legerősebb (egyélű) út, azaz a többi út x és y között csak gyengébb lehet, mint (x, y) él erőssége. Ha egy él teljesíti a 2. és 3. feltételeket, akkor annak törlése biztosan hatással van a fuzzy gráf útjainak erősségére, azaz gyengülnek.

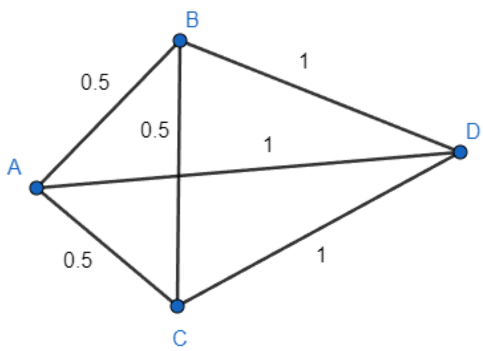
6. Fuzzy erdők

Ebben az alfejezetben a fuzzy erdőkről lesz szó. Úgy szeretnénk definiálni, hogy létezik olyan körmentes részgráfja, amelyben van út minden olyan x és y csúcs között, amelyek össze vannak kötve az eredeti gráfban. Ha ez a körmentes részgráf megegyezik a gráffal, akkor kapunk egy erdőt, tehát minden gráf egy fuzzy gráf.

6.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy $G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy erdő, ha létezik $F = (X, \tilde{T})$ körmentes fuzzy részgráf G-ben, hogy $\forall (x, y) \notin F : \tilde{R}(x, y) < \tilde{T}^{\infty}(x, y)$.

6.1. Tétel. *Egy G fuzzy gráf pontosan akkor egy fuzzy erdő, ha G bármely körében létezik egy (x, y) él, hogy $\tilde{R}(x, y) < \tilde{R}'^{\infty}(x, y)$, ahol $G' = (X, \tilde{R}')$ G-nek egy olyan parciális fuzzy részgráfja, amelyet az (x, y) él törlésével kapunk.*

A bizonyítás megtalálható forrásunk 28. oldalán, és konstruktív, ezért egy példán keresztül fogjuk megmutatni.



2. ábra.

Azt fogjuk belátni, hogy a fenti fuzzy gráf egy fuzzy erdő. Ennek a fuzzy gráfnak a köreit kell vizsgálni. Vegyük észre, hogy bármelyik kör leggyengébb éle 0.5. Ez fontos észrevétel, ugyanis a vizsgált körökben érdemes a leggyengébb élt törölni. Töröljük az AB élt, és ki kell számolnunk az A és B közötti utak erősségét. Ha van olyan út, melynek erőssége nagyobb mint 0.5, azaz 1, akkor nyert ügyünk van. Itt az ADB út erőssége 1, tehát létezik ilyen út. Az AC élt vizsgálva ugyanígy ADC egy megfelelő út. Ha töröljük a BC élt, akkor egy megfelelő út BDC. Összesítve, minden körben van olyan él (ez a minimális erősségű él), amelyet törölve még van olyan út, amely erősebb, mint a törölt él. Tehát a vizsgált fuzzy gráf egy fuzzy erdő. Itt az F fuzzy részgráfot úgy kapjuk, hogy addig törlünk élt, míg körmentes fuzzy részgráfot nem kapunk. Mivel minimális éleket töröltünk, ezért az F-ben lévő utak a G-beli csúcsok között biztosan erősebb, tehát megkapjuk a definícióbeli egyenlőtlenséget. Azt is érdemes megjegyezni, hogy ha G összefüggő, akkor F összefüggő marad. A vizsgálat során nincs olyan lépés, ahol F szétesne. Az F fuzzy részgráf nagyban befolyásolja a G fuzzy erdőt, amelyet a következő állítás mond ki:

6.1. Állítás. *Ha G egy fuzzy erdő, akkor F élei G hídjai.*

A bizonyítás megtalálható a forrásunk 29. oldalán. Nézzük a fenti fuzzy erdőt. Az F fuzzy részgráfot úgy kapjuk meg, hogy $\forall (x, y) \in F : \tilde{R}(x, y) \geq \tilde{T}^{\infty}(x, y)$. Azon élek, melyek erőssége 1, biztosan F-beli lesz. Továbbá az ABC kör egyik éle sem lesz benne F-ben: ha legalább kettő éle lenne benne F-ben, akkor F nem lenne körmentes. Továbbá $0.5 \geq 1$ nem teljesül, tehát egyik él sem lesz benne F-ben. A nem F-beli élek biztosan nem hidak, mert törlésükkel nem változik a csúcsok közötti utak erőssége. Továbbá az F-beli G hídjai, mivel bármely körben van náluk gyengébb él.