Egyéni kutatómunka beszámoló

Hraboczki Márton

2023. december 15.

1. Bevezetés

A végtelen gráfok témaköre széles és sok kisebb fejezetből áll. Ezek közül néhányról szeretnék szót ejteni, pár, a csúcsok különböző színezésére vonatkozó eredmény ismertetése mentén.

1.1. Definíció. Az X gráf kromatikus száma az a legkissebb számosság, ahány színnel ő jólszínezhető. Jólszínezés alatt a csúcsok egy olyan színezését értjük, ahol bármely két szomszédos csúcs különböző színű. A kromatikus szám jelölése $\mathrm{Chr}(X)$.

A végtelen világában nem minden működik úgy, mint ahogy az a véges esetekben megszokott, ezért azt sem vehetjük evidenciának, hogy minden gráfnak létezik kromatikus száma. Arról nem is beszélve, hogy különböző halmazelméletről és így különböző tulajdonságokkal bíró végtelenekről beszélhetünk, ha más alapaxiómákból indulunk ki. Galvin és Komjáth bebizonyította [1]-ben, hogy ZFC-ben minden gráf esetében értelmes a kromatikus szám, mint kifejezés.

1.2. Tétel. Galvin, Komjáth
Ha igaz a kiválasztási axióma, akkor minden gráfnak létezik kromatikus száma. Sőt, ez a két állítás ekvivalens.

Van egy másik érdekes, a gráfok színezését leíró mennyiség is, ezt Erdős és Hajnal vezette be [2]-ben.

1.3. Definíció. Az X gráf színezési száma az a legkisebb κ számosság, amelyre létezik a V csúcshalmaznak egy olyan $<$ jólrendezése, hogy minden $x \in V$ κ-nál kevesebb nála $<$ szerint kisebb csúccsal van összekötve.

1.4. Megjegyzés. Ha $\mathrm{Col}(X) = \kappa$ és $<$ a hozzá tartozó jólrendezés, akkor transzfinit rekurzióval $<$ mentén meg tudjuk adni X egy jólszínezését κ színnel, vagyis $\mathrm{Col}(X) \leq \mathrm{Chr}(X)$ mindig teljesül.

2. A kromatikus és színezési szám tulajdonságai

A következőkben ennek a két fogalomnak a segítségével vizsgáljuk a végtelen gráfok működését.

2.1. Állítás. κ, λ végtelen számosságok, ekkor a következők teljesülnek:
1, $\mathrm{Col}(\mathrm{K}_\kappa) = \kappa$
2, $\mathrm{Col}(\mathrm{K}_{\kappa,\kappa}) = \kappa$
3, $\kappa < \lambda$-ra $\mathrm{Col}(\mathrm{K}_{\kappa,\lambda}) = \kappa^+$

Érdekes kérdés, hogy egy gráf milyen viszonyban van az ő részgráfjaival a 2 vizsgált mennyiségünket illetően. Az egyik legalapvetőbb eredmény a következő Erdőstől és de Bruijntől származó tétel [3]-ból.

2.2. Tétel. Erdős-de Bruijn
Ha egy gráf minden véges részgráfja jólszínezhető n színnel, ahol n egy természetes szám, akkor az egész gráf is jólszínezhető n színnel.

Egy külön témakör, hogy bizonyos kromatikus számú végtelen gráfok milyen véges részgráfokat tartalmazhatnak, de itt most a végtelen esetekből vizsgálunk párat.

2.3. Tétel. Erdős, Hajnal
Legyen κ egy végtelen számosság. Ekkor a következők állíthatók:
1, Ha X egy olyan gráf, amire $\mathrm{Chr}(X)>\kappa$, akkor létezik egy olyan Y részgráfja, amelyre $\mathrm{Chr}(Y)>\kappa$ szintén teljesül és minden csúcsának a foka $\geq \kappa$.
2, Ha X egy olyan gráf, amire $\mathrm{Col}(X)>\kappa$, akkor létezik egy olyan Y részgráfja, amelyre $\mathrm{Col}(Y)>\kappa$ szintén teljesül és minden csúcsának a foka $\geq \kappa$.

2.4. Állítás. Legyenek $\kappa \geq \omega$ reguláris, $\lambda < \kappa$ számosság. Legyen az X_α $(\alpha < \lambda)$ gráfok ugyanazon a V csúcshalmazon olyanok, amelyekre $\mathrm{Col}(X_\alpha)\leq \kappa$ teljesül. Ekkor az ő $X = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ uniójukra is teljesül, hogy $\mathrm{Col}(X)\leq \kappa$.

2.5. Állítás. κ végtelen számosságra a következő állítások ekvivalensek:
1, $\mathrm{Col}(X)\leq \kappa^+$
2, X felírható κ erdő uniójaként.

Shelah szinguláris számosságokra a következőt bizonyította be [4]-ben.

2.6. Tétel. Szinguláris számosságok kompaktsági tétele
Ha $\lambda > \kappa$ végtelen számosságok, λ szinguláris és X egy olyan gráf, amely minden $|Y| < \lambda$ részgráfjára teljesül, hogy $\mathrm{Col}(Y) \leq \kappa$, akkor $\mathrm{Col}(X) \leq \kappa$.

2.7. Megjegyzés. Ha egy gráf minden összefüggőségi komponense jólszínezhető megszámlálható színnel, akkor az egész gráf is. Átfogalmazva, ha $\mathrm{Chr}(X)> \omega$, akkor létezik egy összefüggő Y részgráfja, amire $\mathrm{Chr}(Y)> \omega$. Ezt Komjáth tovább javította [5]-ben, a következőre.

2.8. Állítás. Ha $\mathrm{Chr}(X)> \omega$, akkor létezik egy n-szeresen összefüggő Y részgráfja, amire $\mathrm{Chr}(Y)> \omega$, minden n-re.

2.9. Megjegyzés. Egy jóval nehezebb bizonyítással megmutatható, hogy olyan n-szeresen összefüggő Y is található, ahol minden csúcs fokszáma végtelen.

A következő kérdés viszont még nyitott.

2.10. Sejtés. Erdős, Hajnal
Ha $\mathrm{Chr}(X)> \omega$, akkor X-nek létezik egy összefüggő Y részgráfja, ami ω-összefüggő.

Részeredmények már voltak ezt illetően. A következő 2 állítást Komjáth bizonyította [6]-ban és [7]-ben.

2.11. Állítás. Konzisztens, hogy minden $|X|$ =Chr(X)= $\aleph_1$ gráfnak létezik ω-összefüggő Y részgráfja, amelyre Chr(Y)= $\aleph_1$.
Ugyanakkor az is konzisztens, hogy létezik olyan $|X|$ =Chr(X)= $\aleph_1$ gráf, amelynek egy Chr(Y)= $\aleph_1$ részgráfja sem ω-összefüggő.

Galvin tette fel a kérdést, hogy a részgráfok kromatikus száma rendelkezik-e valami, a középértéktételre hasonlító tulajdonsággal. Azt értette ezalatt, hogy egy adott X gráfra és egy λ <Chr(X) számosságra van-e Chr(Y)= λ tulajdonsággal rendelkező részgráfja X-nek.
A következő eredményt szintén Komjáth bizonyította [6]-ban.

2.12. Állítás. Komjáth
Konzisztens olyan gráf létezése, amire $|X|$ =Chr(X)= $\aleph_2$, de nem tartalmaz Chr(Y)= $\aleph_1$ részgráfot.

A következőkben gráfok szorzatának kromatikus számára nézünk állításokat.

2.13. Definíció. (V,X), (W,Y) 2 gráf. Az ő szorzatuk az a ($V \times W$, $X \times Y$) gráf, ahol $X \times Y = \{\{<v,w>,<v',w'>\} : \{v,v'\} \in X, \{w,w'\} \in Y\}$. Röviden csak $X \times Y$-al fogjuk jelölni ezt a szorzatot.

2.14. Tétel. Hajnal
Ha Chr(X)< ω ≤Chr(Y), akkor Chr($X \times Y$) =Chr(X).

2.15. Megjegyzés. Ennek egy következménye, hogy ha Chr(X), Chr(Y) véges, akkor Chr($X \times Y$) is.

2.16. Tétel. Hajnal
κ végtelen számosságra léteznek olyan X_α ($\alpha < \kappa^+$) gráfok 2^κ-án, hogy Chr(X_α) = κ^+, de Chr($X_\alpha \times X_{\alpha'}$)= κ, minden $\alpha \neq \alpha' < \kappa$-ra.

Ezt és az előző eredményt Hajnal [8]-ban bizonyította.

2.17. Tétel. Ha κ végtelen számosság és n egy természetes szám, akkor megadható úgy κ^+ gráf, mind 2^κ számosságú, hogy közülük bármely n szorzata κ^+ kromatikus számú, de bármely $n+1$ szorzata már csak κ kromatikus számú.

2.18. Tétel. Hajnal
Ha Chr(X) , Chr(Y) $> \kappa$, Chr($X \times Y$) $< \kappa$, akkor Chr(X') $< \kappa$, Chr(Y') $< \kappa$ teljesül minden $|X'| = \kappa$, $|Y'| = \kappa$ részgráfra.

2.19. Tétel. Soukup
Az általánsoított kontinuum hipotézissel konzisztens olyan $|X_0| = |X_1|$ = Chr(X_0) = Chr(X_1) = ω_2 gráfok létezése, amelyek szorzatára Chr($X_0 \times X_1$) = ω.

[9]-ben olvasható ennek a bizonyítása.

2.20. Tétel. Thomassen
Ha Col(X) $> \kappa$, akkor létezik egy κ-élösszefüggő Y részgráfja X-nek, amire Col(Y) $> \kappa$.

2.21. Tétel. Thomassen
Ha Chr(X) $> \kappa$, akkor létezik egy there is a κ-élösszefüggő Y részgráfja X-nek, amire Chr(Y) $> \kappa$.

Ez utóbbiakról pedig [10]-ben olvashatunk.

Hivatkozás

[1] F. Galvin, P. Komjáth, Graph colorings and the axiom of choice, Period. Math. Hungar. 22 (1991) 71–75.
[2] P. Erdős, A. Hajnal, On chromatic number of graphs and set systems, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 17 (1966) 61–99.
[3] N.G. de Bruijn, P. Erdős, A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of infinite relations, Indag. Math. 13 (1951) 371–373
[4] S. Shelah, Incompactness for chromatic numbers of graphs, in: A. Baker, B. Bollobás, A. Hajnal (Eds.), A Tribute to Paul Erdős, Cambridge University Press, 1990, pp. 361–371.
[5] P. Komjáth, Connectivity and chromatic number of infinite graphs, Israel J. Math. 56 (1986) 257–266.
[6] P. Komjáth, Consistency results on infinite graphs, Israel J. Math. 61 (1988) 285–294
[7] P. Komjáth, A note on chromatic number and connectivity of infinite graphs, Israel J. Math. 196, (2013) 499–506
[8] A. Hajnal: The chromatic number of the product of two 1-chromatic graphs can be countable, Combinatorica, 5(1985), 137–140.
[9] L. Soukup: Elementary submodels in infinite combinatorics, Disc. Math., 311(2011), 1585–1598.
[10] C. Thomassen: Infinitely connected subgraphs of uncountable chromatic number, Combinatorica, 37, (2017) 785–793