Önálló projekt I.
Beszámoló

Gehér Panna

Euklideszi Ramsey elmélet

Témavezető: Tóth Géza

BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

2020-2021. I. félév

Bevezetés

Az Euklideszi Ramsey elmélet a Ramsey elméletnek egy rendkívül érdekes, főleg geometriai vonatkozású kérdésekkel foglalkozó ága. Egy tipikus feladat azt kérdezi, hogy milyen K pont konfigurációra és n, r értékekre teljesül, hogy R^n minden r-színezésében található K-val egybevágó egyszínű konfiguráció. A feladatnak számtalan különböző változata ismert, például az egyes színosztályokban kereshetünk különböző konfigurációkat, vagy éppen egybevágóság helyett tekinthetünk más transzformációkat. Az 1970-es években jelent meg Erdős és társainak háromrészes cikksorozata, Euklideszi Ramsey elmélet címmel [2] [3] [4]. Ebben rengeteg kérdést vetettek fel, sokat meg is válaszoltak. Azonban vannak köztük mostanáig megoldatlan feladatok is. A témakör egyik leghíresebb nyitott kérdése az úgynevezett Hadwiger–Nelson probléma: Mennyi a sík kromatikus száma, azaz legkevesebb hány színnel lehet kiszínezni a sík pontjait úgy, hogy ne legyen két egyszínű pont egységtávolságra? A pontos érték meghatározása meglehetősen nehéz feladatnak bizonyul. Egyszerű példák mutatják, hogy hét szín elég, de három szín nem. Sokáig nem sikerült ezen korlátokon javítani, így nagy visszhangot keltett, mikor 2018-ban de Grey [5] igazolta, 4 szín sem elég. Ezáltal a terület újra nagyobb figyelmben részesült az utóbbi években.

A vizsgált feladat

Elsősorban a Hadwiger-Nelson probléma következő, aszimmetrikus változatát vizsgáltam, melyet Erdős és társai vetettek fel cikksorozatukban. Milyen K konfigurációkra teljesül, hogy a sík minden piros-kék színezésében található vagy egységtávolságú piros pontpár, vagy K-val egybevágó egyszínű kék konfiguráció? Erdősék azt sejtették, hogy K jó választása például az egységnégyzet. Néhány évvel később Juhász [7] ennél többet bizonyított: minden 4 pontú konfiguráció teljesíti a feltételeket. A kérdést a következőképp általánosíthatjuk: R^n-nek egy piros-kék színezését nevezzük megengedettnek, ha nem tartalmaz egységtávolságú piros pontpárt. Standard színezésről akkor beszélünk, ha megengedett, és a piros pontok 1/2 sugarú nyílt gömbök uniójaként áll elő. Kérdés, hogy mekkora az a legnagyobb k_n érték, melyre teljesül, hogy tetszőleges k_n pontú K konfiguráció esetén R^n minden megengedett színezésében létezik K-val egybevágó egyszínű kék konfiguráció. Tehát Juhász azt igazolta, hogy $k_2 \geq 4$. Már Erdősék cikkében is megjelent, hogy k_2 felülről korlátos. Ezt egy nem éppen optimális rácsmenti színezés-konfiguráció párral igazolták, konfigurációjuk 10^{12} pontól állt. Juhásznak sikerült a felső korlátot 11-re csökkentenie, majd Csizmadia és Tóth [1] tovább javított ezen: A 2 oldalú háromszögrácshoz tartozó standard piros-kék színezésben egy 8 pontú ellenpéldát találtak. Vegyünk egy szabályos hétszöget, melynek körülírt köre 1-nél kicsit kisebb. A konfiguráció álljon a hétszög csúcsaiból illetve a körülírt kör középpontjából. Megmutatták, hogy a 8 pont köré írt 1/2 sugarú körök uniójába mindenképp esik egy rácspont. Tehát a konfigurációnak a megfelelő körhöz tartozó pontja mindenképp piros pontra esik.

Erdősék cikkében leírt színezést és konfigurációt könnyen kiterjeszthetjük magasabb dimenziós esetekre, így k_n végessége azonnal adódik, de az így kapott korlát továbbra sem optimális. Ennél egy kicsivel jobb korlátot ad a következő konstrukció:

Vegyünk egy maximális egységgömbökből álló pakolást. Ekkor a gömböket kétszereseikre növelve lefedik a teret. Vegyük a pakolás középpontjaihoz tartozó standard színezést. A konfigurációt a következőképp határozzuk meg: Egy 2 sugarú gömböt fedjünk le 1/2 sugarú gömbökkel. C.A. Rogers [8] tétele alapján nagy n esetén ehhez elég $(4+o(1))^n$ gömb. A konfiguráció álljon ezeknek a gömböknek a középpontjaiból. A pakolás maximális elemszáma miatt egy 2 sugarú gömb mindenképp tartalmazza a pakolás egyik gömbjének középpontját. Az ehhez tartozó piros gömbbe tehát mindenképp esik pontja a konfigurációnak, így nagy n esetén $k_n < (4+o(1))^n$.

Felvetődik a kérdés, vajon mennyiben egyszerűsödik feladatunk, ha az egybevágósági transzformációk halmazát kizárólag az eltolásra szűkítjük. Szlam cikkében [9] ezt a kérdést vizsgálta. Jelöljük k_n^*-el a módosított feladatra vonatkozó k_n értéket. Természetesen $k_n^* \leq k_n$.

Szlam 1. lemmája azt állítja, hogy $\chi(R^n) < k_n^*$: Vegyünk egy konfiguráció-színezés ellenpélda párt úgy, hogy a konfiguráció a lehető legkevesebb pontból álljon. Pontjai legyenek $a_1, \dots a_k$. Ez alapján megadjuk R^n-nek egy k-színezését. Egy p pontot a legkisebb olyan i színnel színezzük, melyre $p+a_i$ piros. A feltételek alapján minden pontot kiszíneztünk és egyik színosztályban sincs egységtávolságú pontpár. Tehát valóban, $\chi(R^n) \leq k = k_n^* + 1$. A lemmát és de Grey eredményét (miszerint $\chi(R^2) \geq 5$) összevetve adódik Juhász tételének erősebb változata: $k_2^* \geq 4$.

Magasabb dimenzióban a kromatikus számra sokáig csak lineáris alsó korlátok voltak ismertek. Így nagy áttörést jelentett, mikor Frakl és Wilson [6] halmazrendszerek segítségével exponenciális korlátot mutatott: $\chi(R^n) \geq (1.2+o(1))^n$. Bizonyításuk ötlete a következő: Tekintsük az n dimenziós tér néhány pontját, mint n hosszú 0-1 sorozatokat. Ezek megfeleltethetőek az n elemű halmaz bizonyos részhalmazainak úgy, hogy két pont akkor és csak akkor határoz meg egységtávolságot, ha a hozzájuk tartozó két halmaz metszete adott méretű. Így átfogalmazhatjuk a kérdést: Maximum hány halmazt válaszhatunk ki úgy, hogy egyik halmazpárnak se legyen tiltott elemszámú (azaz egységtávolságú pontpárt eredményező) metszete? Az derül ki, hogy nem lehet "túl sok" halmazt kiválasztani, ami azt jelenti, hogy a kiválasztott pontok közül "kevés" kerülhet egy színosztályba.

Tehát ez azt jelenti, hogy még az egyszerűsített feladara sem létezik kicsi ellenpélda.

Szlam 2. lemmája egyfajta duálisa 1. lemmájának. Ha $\chi(R^n) \leq k$ és ezt olyan k-színezés igazolja, melyben a színosztályok egymás eltoltjai, akkor $k_n^* \leq k$.: Legyenek az adott színosztályok: C, $C+v_1 \dots C+v_{k-1}$. C pontjait színezzük át pirosra, a többi pont legyen kék. Ez egy megengedett színezés. Álljon a konfiguráció az eltolás vektorokból, azaz $K := \{0, v_1, \dots v_{k-1}\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy K a k-színezésnek minden színosztályából 1-1 pontot tartalmaz, így a piros C halmazból is.

A sík jól ismert 7-színezése megfelel a lemma feltételeinek, így $k_2^* < 7$ adódik.

További tervek

A témakör még rengeteg izgalmas kérdést tartalmaz. Következő félévben azt szeretném megvizsgálni, mennyiben módosul a feladat, ha az euklideszi metrika helyett egy másik metrikát választunk. Elsősorban Minkowski terekre szeretnék majd koncentrálni. Első megfigyelésként elmondhatjuk, hogy Szlam két lemmája tetszőleges eltolás-invariáns metrikára teljesül, így a Minkowski terekben továbbra is érvényes marad k_n^* és a kromatikus szám közti szoros kapcsolat. Kérdés, ez esetben milyen felső korlátokat mondhatunk k_n értékeire, illetve, hogy speciálisan a síkban miként lehetne módosítani a Csizmadia-Tóth konfigurációt. Valószínűleg jó alsó korlátot adni nehéz feladat. Eddig egyedül az l_p normák esetén ismert exponenciális alsó korlát: ez Frankl és Wilson bizonyításának kis módosításával adódik.

Hivatkozások

[1] Gy. Csizmadia, G. Tóth (1994) *Note on a Ramsey-type problem in geometry*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 65(2), 302-306.

[2] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer and E.G. Straus (1973) *Euclidean Ramsey Theorems*, J. Combin. Theory A14:341-363

[3] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer and E.G. Straus (1975) *Euclidean Ramsey Theorems II.*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai vol. 10. Infinite and Finite Sets: 529-557. North-Holland, Amsterdam.

[4] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer and E.G.Straus (1975) *Euclidean Ramsey Theorems III.*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai vol. 10. Infinite and Finite Sets: 559-583. North-Holland, Amsterdam.

[5] A. de Grey (2018) Chromatic Number of the Plane Is at least 5, Geombinatorics, 28, 5–18.

[6] P. Frankl, R. M. Wilson (1981), *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica, 1(4), 357-368.

[7] R. Juhász (1979) type theorems in the plane., Journal of Combinatorial Theory, Series A, 27(2), 152-160.

[8] C. A. Rogers (1963), *Covering a sphere with spheres*, Mathematika 10, 157–164

[9] A. D. Szlam (2001), *Monochromatic translates of configurations in the plane*, Journal of combinatorial theory. Series A, 93(1), 173-176.