Euklideszi Ramsey elmélet

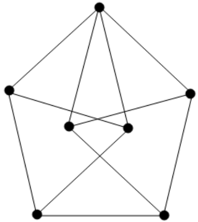
Gehér Panna
Témavezető: Tóth Géza

2020-2021. I. félév

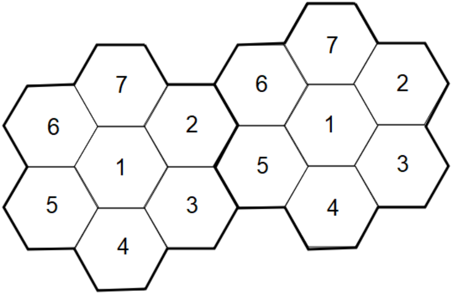
Hedwiger-Nelson probléma

Kérdés: Mennyi a sík kromatikus száma?

- Egyszerű példák mutatják, hogy $4 \leq \chi(R^2) \leq 7$



Moser-gráf



a sík 7-színezése

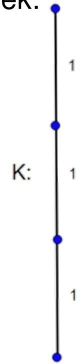
- de Grey (2018): $5 \leq \chi(R^2)$

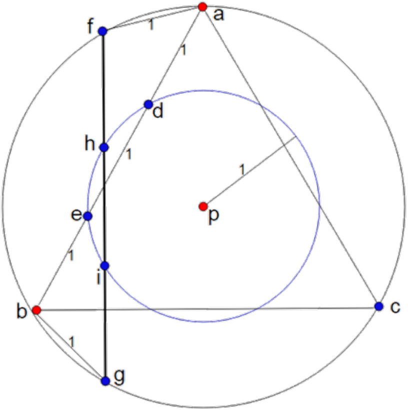
A vizsgált feladat: Erdős és társai (1975)

Megengedett piros-kék színezés: 

Kérdés: adott K konfiguráció. Minden megengedett piros-kék színezésében van K-val egybevágó egyszínű kék konfiguráció?

- Erdősék:

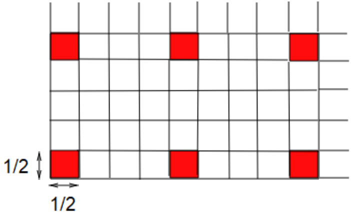


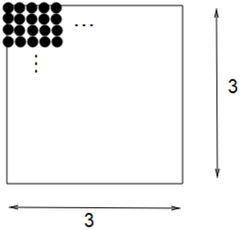


- Juhász: minden 4 pontú konfiguráció jó

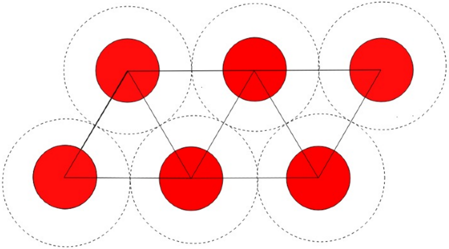
Felső korlát síkban

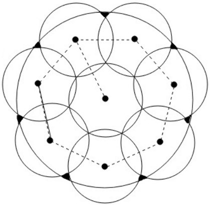
- Erdős és társai: 10^{12} pontú ellenpélda





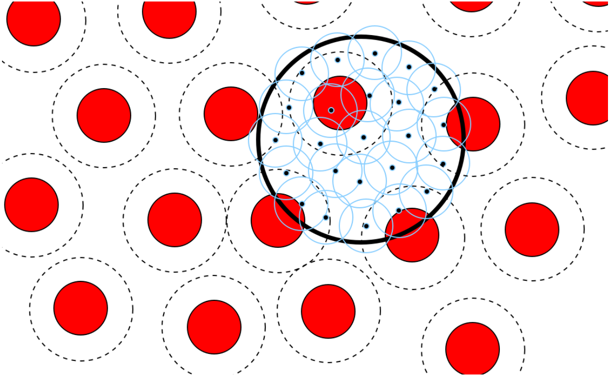
- Juhász: 12 pontú ellenpélda
- Csizmadia-Tóth: 8 pontú ellenpélda





Felső korlát magasabb dimenzióban

Nagy n esetén R^n-ben $(4 + o(1))^n$ pontú ellenpélda:



Kapcsolat a kromatikus számmal I.

Lemma (Szlam I.)

k pontú ellenpélda R^n-ben $\rightsquigarrow$ R^n jó k-színezése

Adott egy konfiguráció-színezés ellenpélda pár
$K := \{a_1, \dots a_k\}$
Egy p pont színe legyen: i. szín, melyre $p + a_i$ piros

- minden pontot kiszíneztünk
- egyik színosztályban sincs egységtávolságú pontpár

Megjegyzés:
Elég, ha K-nak nincs csupa kék eltoltja

Következmény:
Síkban: de Grey $\rightarrow$ alsó korlát: 5
n dimenzióban: Frankl-Wilson $\rightarrow$ alsó korlát: $(1.2 + o(1))^n$

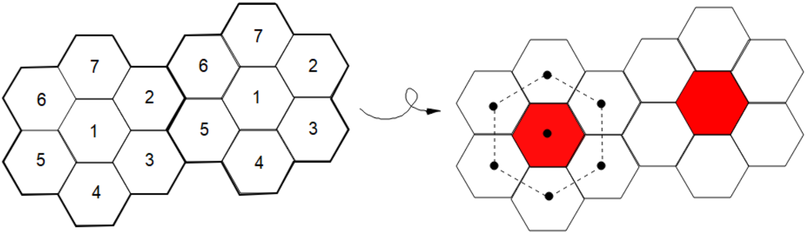
Kapcsolat a kromatikus számmal II.

Módosított feladat: Csak eltolást engedünk meg

Lemma (Szlam II.)

Ha R^n egy jó k-színezése olyan, hogy a színosztályok egymás eltoltjai $\rightsquigarrow$ k pontú ellenpélda (a módosított feladatra!)

Piros: az egyik színosztály, a konfiguráció: az eltolás-vektorok
Példa: a sík 7- színezése megfelel a feltételeknek



Hasonlóan 3 dimenziós térben: 15 pontú ellenpélda

További kérdések

Mennyiben módosul a feladat, ha nem az euklideszi metrikát tekintjük?

- felső korlát Minkowski terekben?
- síkban miként módosul a Csizmadia-Tóth konfiguráció?

Köszönöm a figyelmet!