Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Fenyőpakolások alkalmazásai

Önálló projekt II.

Barabás Ábel

Témavezető:
Király Csaba
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2023

1 Bevezetés

Ebben a félévben szabadgyökerű matroid alapú pakolások létezésének karakterizálásával foglalkoztam. Több eredményt sikerült [1]-ből általánosítani.

2 Matroid alapú fenyőpakolások

Adott egy $G = (S, T, E)$ páros gráf és egy $p : T \to \mathbb{Z}$ pozitívan metsző szupermoduláris halmazfüggvény, amire $p(\emptyset) = 0$. Jelölje $|\Gamma(Y)|$ Y G-beli szomszédainak halmazát. Ekkor azt mondjuk, hogy G fedi p-t, ha $\forall Y \subseteq T : p(Y) \leq |\Gamma(Y)|$. Ha adott egy $M = (S, r)$ matroid, akkor azt mondjuk, hogy G M-fedi p-t, ha $\forall Y \subseteq T : p(Y) \leq r(\Gamma(Y))$.

Adott egy $D = (V + s, A)$ digráf, s befoka 0, a kilépő éleket **gyökéréleknek** hívjuk. Egy s-gyökerű fenyőt s-fenyőnek hívunk. Ha $X, Z \subseteq V + s$, akkor $\varrho_Z(X)$ jelölje a $Z - X$-ből X-be lépő A-beli élek számát illetve $\partial_Z(X)$ ugyanenezen élek halmazát.

Tegyük fel, hogy adva van egy $M_1 = (\partial_s(V), r_1)$ matroid a gyökéréleken. Ekkor a $T_1, \ldots, T_k$ s-fenyők pakolását M_1**-alapúnak** hívjuk, ha minden T_i pontosan egy e_i gyökérélet tartalmaz és minden $v \in V$ csúcsra $\{e_i : v \in V(T_i)\}$ az M_1 egy bázisát alkotja. Ha adott egy $M_2 = (A, r_2)$ matroid D élein, akkor egy s-fenyőpakolást M_2**-megszorítottnak** hívunk, ha minden fenyő élhalmaza a pakolásban független M_2-ben.

Tétel 2.1. *(Bérczi, Frank [1]) Adott egy fokszámelőírás m_S S-en, amire $\widetilde{m}_S(S) = \gamma$. Tegyük fel, hogy*

$$m_S(s) \leq |T| \ \forall s \in S$$

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(A) *Létezik olyan egyszerű páros gráf $G = (S, T, E)$, ami fedi p_T-t es teljesíti a fokszámelőírást.*

(B1) *Minden $\{T_1, \ldots, T_q\}$ szubpartíciójára T-nek es $X \subseteq S$-re:*

$$\widetilde{m}_S(X) + \sum_{i=1}^{q} p_T(T_i) - q|X| \leq \gamma$$

(B2) *Minden $\{T_1, \ldots, T_q\}$ szubpartíciójára T-nek:*

$$\sum_{i=1}^{q} p_T(T_i) \leq \sum_{s \in S} \min\{m_S(s), q\}$$

Az előző tétel segítségével bebizonyítható a következő tétel, ami karakterizalja a fix méretű szabad gyökerű fenyvespakolások létezését:

Tétel 2.2. *(Bérczi, Frank [1]) Legyen $D = (V, A)$ egy n csúcsú digráf és legyenek $\mu_1, \ldots, \mu_k$ pozitív egész számok. Ekkor a következő állítások ekivivalensek:*

(A) *létezik D-ben k darab éldiszjunkt feszítőfenyves $B_1, \ldots, B_k$, amikre $|B_i| = \mu_i$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra.*

(B1) *Minden $\{V_1, \ldots, V_q\}$ szubpartíciójára V-nek:*

$$\sum_{j=1}^{k} \max\{0, q - (n - \mu_j)\} \leq \sum_{i=1}^{q} \varrho(V_i)$$

(B2) *Legyen $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$. Minden $\{V_1, \ldots, V_q\}$ szubpartíciójára V-nek **es** $X \subseteq [k]$**-re**:*

$$|[k] - X|q - \sum_{j \in [k] - X} n - \mu_j \leq \sum_{i=1}^{q} \varrho(V_i)$$

A következő tétel a 2.1. Tétel általánosítása, aminek segítségével bebizonyítható a 2.2. Tétel több általánosítása.

Tétel 2.3. *(Bérczi, Frank [2]) Adott egy matroid $M = (S, r)$, egy pozitívan metsző szupermoduláris P_T függvény T-n, és egy fokszámelőírás m_S S-en, amire $\widetilde{m}_S(S) = \gamma$. Pontosan akkor létezik olyan egyszerű páros gráf $G = (S, T, E)$, ami M-fedi p_T-t és teljesíti a fokszámelőírást, ha*

$$m_S(s) \leq |T| \ \forall s \in S$$

és minden $\{T_1, \dots, T_q\}$ szubpartíciójára T-nek és $X \subseteq S$-re:

$$\widetilde{m}_S(X) + \sum_{i=1}^{q} p_T(T_i) - qr(X) \leq \gamma$$

Tétel 2.4. *(Durand de Gevigney, Nguyen, Szigeti [3]) Adott egy $M = (\partial_s(V), r)$ matroid. Pontosan akkor létezik D-ben egy M-alapú s-fenyőpakolás, ha*

$$\varrho_V(X) \geq r(M) - r(\partial_s(X))$$

minden $X \subseteq V$-re.

Tétel 2.5. *(Cs. Kiraly, Szigeti, Tanigawa [4]) Adott egy $D = (V + s, A)$ gráf, egy $M_1 = (S, r_1)$ matroid r_1 rangfüggvénnyel, M_2 egy matroid A-n, ami $M_v = (\partial(v), r_v)$ matroidok direkt összege. Pontosan akkor létezik D-ben egy M_1-alapú M_2-megszorított s-fenyőpakolás, ha*

$$r_1(F) + r_2(\partial(X) - F) \geq r_1(\partial_s(V))$$

minden $\emptyset \neq X \subseteq V$-re és $F \subseteq \partial_s(X)$. Ha az s-re illeszkedő éleken $M_2 = M_2|_{\partial_s(V)} \oplus M_2|_{E(V)}$ es $M_2|_{\partial_s(V)}$ a szabad matroid, akkor a feltétel a következő:

$$r_1(\partial_s(X)) + r_2(\partial(X) - \partial_s(X)) \geq r_1(\partial_s(V))$$

minden $\emptyset \neq X \subseteq V$-re.

Tétel 2.6. *Legyen $D = (V, A)$ egy n csúcsú digráf és legyen $M_1 = (S, r_1)$ egy matroid r_1 rangfüggvénnyel és k ranggal, M_2 egy matroid A-n, ami $M_v = (\partial(v), r_v)$ matroidok direkt összege. Legyen s egy V-n kívüli új csúcs. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(A) *Be tudunk húzni s-bol V csúcsaiba irányított éleket és ezekre az élekre ráképezni S elemeit úgy, hogy létezzen M_1-alapú M_2'-megszorított s-fenyőpakolás, ahol M_2' az új éleken definiált szabad matroid és M_2 direkt összege.*

(B) *Minden $\{V_1, \dots, V_q\}$ szubpartíciójára V-nek es $X \subseteq S$-re:*

$$(k - r_1(X))q - |S - X| \leq \sum_{i=1}^{q} r_2(\partial(V_i))$$

Bizonyítás: Szükségesség: Ha adott egy fenyőpakolás, akkor egy $Y \subset V$-be legfeljebb $r_2(\partial(Y))$ fenyőél léphet be, de legalább $k - \partial_s(Y)$-nak kell. Tehát

$$\sum_{i=1}^{q} (k - r_1(\partial_s(V_i))) \leq \sum_{i=1}^{q} r_2(\partial(V_i))$$

A rangfüggvény tulajdonságait használva:

$$\sum_{i=1}^{q} r_1(\partial_s(V_i)) \leq \sum_{i=1}^{q} r_1(\partial_s(V_i) \cap X) + r_1(\partial_s(V_i) - X)) \leq qr_1(X) + |S - X|$$

Tehát

$$\sum_{i=1}^{q} r_2(\partial(V_i)) \geq \sum_{i=1}^{q} (k - r_1(\partial_s(V_i))) \geq qk - qr_1(X) - |S - X|$$

Elégségesség: Legyen $m_S : S \to \mathbb{Z}_+$ konstans 1 S-en, és legyen $T := V$, amin definiáljuk a következő halmazfüggvényt:

$$p_T(Y) = \begin{cases} k - r_2(\partial(Y)) & \varnothing \subset Y \subseteq T, \\ 0 & Y = \varnothing. \end{cases}$$

Ekkor p_T metsző szupermoduláris. A tétel feltételéből:

$$(k - r_1(X))q - \sum_{i=1}^{q} r_2(\partial(V_i)) \leq |S - X| = \widetilde{m}_S(S - X) = \widetilde{m}_S(S) - \widetilde{m}_S(X)$$

$$-r_1(X)q + \sum_{i=1}^{q} (k - r_2(\partial(V_i))) \leq \widetilde{m}_S(S) - \widetilde{m}_S(X)$$

$$\sum_{i=1}^{q} p_T(V_i) + \widetilde{m}_S(X) - r_1(X)q \leq \widetilde{m}_S(S)$$

Ez pont a 2.3. Tétel feltétele, tehát létezik olyan $G = (S, V, E)$ egyszerű páros gráf, ami fedi p_T-t és teljesíti az m_S fokszámelőírást, tehát $r_1(\Gamma(Y)) \geq k - \varrho(Y)$ $\forall Y \subset V$. Irányítsuk meg G éleit S-ből $T = V$ féle, húzzuk be D éleit T-n, és húzzuk össze egy csúccsá S-et, az így kapott csúcsot hívjuk s-nek. Ekkor $\Gamma(Y) = \partial_s(Y)$, lesz, tehát a függvényfedési feltétel szerint $r_1(\partial_s(Y)) \geq k - r_2(\partial(Y))$, ami a 2.5. Tétel feltétele az M_1 es M_2' matroidokra nézve, azaz létezik M_1-alapú M_2-megszorított s-fenyőpakolás.

□

Az előbbi tétel segítségével bebizonyítható a következő tételben a **(B1)** feltétel elégségessége. A **(B2)** feltétel látszólag gyengítése **(B1)**-nek, de a 2.3. Tétel segítségével belőle is bizonyítható **(A)**.

Tétel 2.7. *Legyen $M = (S, r)$ egy matroid r rangfüggvénnyel, és legyen $D = (V, A)$ egy n csúcsú digráf, amin legyen adott egy $m_{in} : V \to \mathbb{Z}^+$ befokszámelőírás, amire $0 \leq m_{in}(v) \leq \varrho_D(v)$ és $m_{in}(V) \leq r(M)$ minden $v \in V$ csúcsra, emellett $\widetilde{m}_{in}(V) = |V|r(M) - |S|$ teljesül. Legyen s egy V-n kívüli új csúcs. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(A) *Be tudunk húzni s-ből V csúcsaiba irányított éleket és ezekre az élekre ráképezni S elemeit úgy, hogy létezzen M-alapú s-fenyőpakolás, aminek élhalmaza a gyökéréleken kívül F es $\varrho_F(v) = m_{in}(v)$ teljesül minden $v \in V$-re.*

(B1) *Minden $\{V_1, \ldots, V_q\}$ szubpartíciójára V-nek*

$$(r(M) - r(X))q - |S - X| \leq \sum_{v \in \bigcup_{i=1}^{q} V_i} \min\{m_{in}(v), |\partial(v) \cap \partial(V_i)|\}$$

(B2) *Minden $Y \subseteq V$, $\{V_1, \ldots, V_q\}$ szubpartíciójára $V - Y$-nak és $X \subseteq S$-re:*

$$(|Y| + q)(r(M) - r(X)) - |S - X| \leq \widetilde{m}_{in}(Y) + \sum_{i=1}^{q} \varrho_D(V_i)$$

Bizonyítás: **(A) ⇔ (B1):**

Legyen $M_1 = M$ és legyen $\forall v \in V$-re M_v az uniform matroid $\partial(v)$-n $m_{in}(v)$ korláttal. Legyen M_2 a direkt összege az M_v matroidoknak. Ekkor

$$r_2(\partial(V_i)) = \sum_{v \in V_i} \min\{m_{in}(v), |\partial(v) \cap \partial(V_i)|\},$$

tehát

$$\sum_{i=1}^{q} r_2(\partial(V_i)) = \sum_{v \in \bigcup_{i=1} V_i} \min\{m_{in}(v), |\partial(v) \cap \partial(V_i)|\}$$

Tehát a (B1) feltétel megegyezik a 2.6. Tétel feltételével, így létezik M_1-alapú M_2-megszorított fenyőpakolás, tehát minden v csúcsba legfeljebb $m_{in}(v)$ fenyő lép bele. Mivel $\widetilde{m}_{in}(V) = |V|r(M) - |S|$, ahol a jobb oldal egy M-alapú pakolás élszáma, tehát minden csúcsba pont $m_{in}(v)$ él lép be.

(B1) $\Rightarrow$ (B2):

Tegyük fel, hogy (B1) teljesül, és adott egy $Y \in V$ és egy $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_q\}$ szubpartíciója $V - Y$-nak. Ekkor nézzük a következő partíciót: $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \bigcup_{v \in Y} \{v\}$. Ekkor $|\mathcal{P}'| = q + |Y|$, $m_{in}(Y) = \sum_{v \in Y} \min\{m_{in}(v), |\partial(v) \cap \partial(V_i)|\}$ es $\sum_{v \in \bigcup_{i=1}^q V_i} \min\{m_{in}(v), |\partial(v) \cap \partial(V_i)|\} \leq \sum_{i=1}^q \varrho_D(V_i)$, tehát (B2) is teljesül.

(B2) $\Rightarrow$ (A):

Elégségesség: Legyen $m_S : S \to \mathbb{Z}_+$ konstans 1 S-en, és legyen $T := V$, amin definiáljuk a következő halmazfüggvényt:

$$p_T(Y) = \begin{cases} r(M) - \varrho_D(Y) & Y \subseteq T, |Y| \geq 2, \\ r(M) - m_{in}(v) & Y = \{v\}, v \in V \\ 0 & Y = \varnothing. \end{cases}$$

Mivel $m_{in}(v) \leq \varrho_D(v)$, ezért $k - m_{in}(v) \geq k - \varrho_D(v)$, ezért p_T metsző szupermoduláris.

Legyen $\mathcal{T} = \{V_1, \dots, V_q, \dots, V_{q'}\}$ egy szubpartíciója T-nek, ahol az utolsó $q' - q$ osztály egyelemű. Legyen $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_q\}$ es $Y = V_{q+1} \cup \dots \cup V_{q'}$.

p_T definícója alapján:

$$\sum_{i=1}^{q'} p_T(V_i) = \sum_{i=1}^{q} [r(M) - \varrho_D(V_i)] + \sum_{i=q+1}^{q'} [r(M) - \widetilde{m}_{in}(V_i)] = (|Y| + q) r(M) - \sum_{i=1}^{q} \varrho_D(V_i) - \widetilde{m}_{in}(Y)$$

Írjuk fel a 2.3. Tétel feltételét $\mathcal{T}$ és egy $X \subset V$-re és helyettesítsünk be $\sum_{i=1}^{q'} p_T(V_i)$ helyére:

$$\widetilde{m}_S(X) + (|Y| + q) r(M) - \sum_{i=1}^{q} \varrho_D(V_i) - \widetilde{m}_{in}(Y) - q' r(X) \leq \widetilde{m}_S(S)$$

Ezt átrendezve, és kihasználva, hogy $q' = |Y| + q$ es $\widetilde{m}_S(S) - \widetilde{m}_S(X) = |S - X|$ pont a bizonyítandó tétel feltételét kapjuk. Tehát létezik olyan $G = (S, V, E)$ egyszerű páros gráf, ami fedi p_T-t és teljesíti a fokszámelőírást. Emiatt minden $v \in V$-re $r(M) - m_{in}(v) \leq r(\Gamma_G(v)) \leq d_G(v)$ (ahol $\Gamma_G(v)$ a v szomszédainak halmaza G-ben), tehát

$$\sum_{v \in V} [r(M) - m_{in}(v)] \leq \sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{s \in S} d_G(s) = |S|$$

Mivel a tétel feltétele szerint $\widetilde{m}_{in}(V) = |V| r(M) - |S|$, ezért az egyenlőtlenség bal oldala is $|S|$-el egyenlő, tehát mindenhol egyenlőség van, így $\forall v \in V$-re $d_G(v) = r(\Gamma_G(v)) = r(M) - m_{in}(v)$.

Másrészt $\forall Y \subset V$-re $r(M) - \varrho_D(Y) \leq r(\Gamma_G(Y))$ is teljesül, tehát ha az előző tétel végéhez hasonlóan S-et összehúzzuk és megirányítjuk a kimenő éleit, akkor az így kapott gráfra teljesül a 2.4. Tétel feltétele, azaz létezik M-alapú s-fenyőpakolás. Mivel $r(\Gamma_G(v)) = r(M) - m_{in}(v)$, ezért legalább $m_{in}(v)$ fenyő lép bele v-be nem gyökéréllel. A fenyőkben élek cserélésével feltehető, hogy pontosan $r(\Gamma_G(v))$ gyökérél van benne a pakolásban, tehát van olyan jó pakolás, ami pontosan $m_{in}(v)$ éllel lép be v-be.

$\square$

Következmény 2.1. *Legyen $D = (V, A)$ egy n csúcsú digráf, amin legyen adott egy $m_{in} : V \to \mathbb{Z}^+$ befokszámelőírás, amire $0 \leq m_{in}(v) \leq \varrho_D(v)$ es $m_{in}(V) \leq k$ minden $v \in V$ csúcsra. Legyen $\mu_1, \dots, \mu_k$ k db pozitív egész, amikre $\sum_{i=1}^k \mu_i = \widetilde{m}_{in}(V)$ teljesül. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(A) *Létezik D-ben $B_1, \dots, B_k$ k élfüggetlen feszítőfenyves, amikre $|B_i| = \mu_i$ és ha $\bigcup_{i=1}^k B_i = F$, akkor minden $v \in V : \varrho_F(V) = m_{in}(v)$.*

(B1) *(Bérczi, Frank [1]) Minden $Y \subseteq V$ es $\{V_1, \dots, V_q\}$ szubpartíciójára $V - Y$-nak:*

$$\sum_{i=1}^{k} \max\{0, q + |Y| - (n - \mu_i)\} \leq \widetilde{m}_{in}(Y) + \sum_{i=1}^{q} \varrho_D(V_i)$$

(B2) *Minden* $\{V_1, \ldots, V_q\}$ *szubpartíciójára* V*-nek:*

$$\sum_{i=1}^{k} \max\{0, q - (n - \mu_i)\} \leq \sum_{v \in \bigcup_{i=1}^{q} V_i} \min\{m_{in}(v), |\partial(v) \cap \partial(V_i)|\}$$

Bizonyítás: Legyen $n - \mu_j := m_j$. Ez pont egy μ_j élű feszítőfenyves gyökereinek száma.

(A) $\Leftrightarrow$ (B2):

Legyen M_1 a következő partíciós matroid: k osztálya van, az i. mérete m_i, a korlát mindenhol 1. (M_2 legyen ugyanaz a matroid, mint az előbbi bizonyításban.) A 2.7. Tétel szerint $(A) \Leftrightarrow (r(M) - r(X))q - |S - X| \leq \sum_{v \in \bigcup_{i=1}^{q} V_i} \min\{m_{in}(v), |\partial(v) \cap \partial(V_i)|\}$. Feltehetjük, hogy X olyan, hogy egy partícióosztályt vagy teljesen tartalmaz, vagy nem metszi, mert ha egy osztályt metsz, de nem tartalmazza, akkor az osztály többi elemének hozzávételével a baloldal nő, a jobb oldal nem változik. Így ha $I = \{1, \ldots, k\}$, akkor

$$(A) \Leftrightarrow (k - |X|)q - \widetilde{m}(S - X) \leq \sum_{v \in \bigcup_{i=1}^{q} V_i} \min\{m_{in}(v), |\partial(v) \cap \partial(V_i)|\} \forall X \subseteq I$$

A bal oldalt az $X = \{i \in I : m(i) > q\}$ maximalizálja, erre a halmazra pedig $(k - |X|)q - \widetilde{m}(S - X) = \sum_{i=1}^{k} \max\{0, q - (n - \mu_i)\}$

□

3 További tervek

Szigeti [5]-ben karakterizálja fenyőpakolások létezéset egy vegyes gráfban. Célunk ezen eredmények kiterjesztése matroid alapú pakolásokra.

Hivatkozások

[1] Kristóf Bérczi and András Frank. Supermodularity in unweighted graph optimization i: Branchings and matchings. *Mathematics of Operations Research*, 43(3):726–753, 2018.

[2] Kristóf Bérczi and András Frank. Supermodularity in unweighted graph optimization ii: Matroidal term rank augmentation. *Mathematics of Operations Research*, 43(3):754–762, 2018.

[3] Olivier Durand de Gevigney, Viet-Hang Nguyen, and Zoltán Szigeti. Matroid-based packing of arborescences. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27(1):567–574, 2013.

[4] Csaba Király, Zoltán Szigeti, and Shin-ichi Tanigawa. Packing of arborescences with matroid constraints via matroid intersection. *Mathematical Programming*, 181:85–117, 2020.

[5] Zoltán Szigeti. Packing mixed hyperarborescences. In *Proceedings of the 12th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, 2023.