Fenyőpakolások alkalmazásai

Barabás Ábel
Témavezető: Király Csaba

June 1, 2023

LaTeX

Fenyőpakolások

Theorem (Edmonds, erős alak)

Adott egy $D = (V, A)$ digráf, $R_1, \dots, R_k$ részhalmazai V-nek. Mikor létezik k db éldiszjunkt feszítőfenyves, amiknek gyökérhalmazai az R_i halmazok?

Gyökérhalmazok mérete $\leftrightarrow$ fenyvesek mérete
Szabadgyökerű fenyőpakolás:

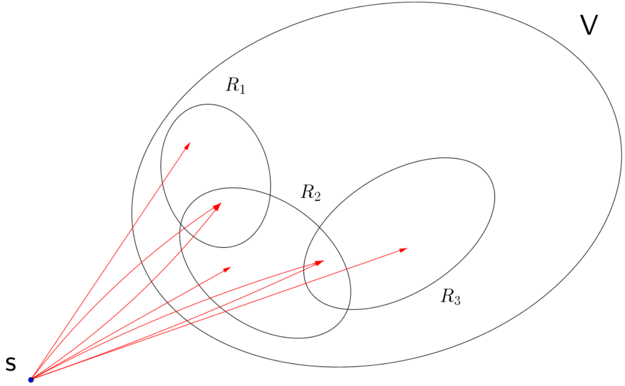
Theorem (Bérczi, Frank)

Adott egy $D = (V, A)$ digráf és legyenek $\mu_1, \dots, \mu_k$ pozitív egész számok. Mikor léteznek éldiszjunkt feszítőfenyvesek az előírt méretekkel?

Utóbbi tételben előírhatjuk minden csúcs fokszámát is.

Ekvivalens megfogalmazás

Adott egy 0 befokú s csúcs (nem eleme V-nek), a kimenő éleket (gyökérélek) partícionáljuk, a partíció osztályaiba tartozó élek végpontjai megfelelnek az R_i halmazoknak.



Matroid alapú fenyőpakolások

Legyen adott egy M_1 matroid a gyökéréleken, és egy M_2 matroid A-n.

Definition

M_1-**alapú** s-**fenyőpakolásnak** hívjuk $T_1, \dots T_k$ éldiszjunkt s-fenyőket, ha minden i-re T_i pontosan egy e_i gyökérélet tartalmaz, és minden $v \in V$ csúcsra $\{e_i : v \in T_i\}$ M_1 egy bázisát alkotja.

Definition

M_2-**megszorított** s-**fenyőpakolásnak** hívjuk $T_1, \dots T_k$ éldiszjunkt s-fenyőket, ha $\bigcup_{i=1}^{q} T_i$ független M_2-ben

Matroid alapú fenyőpakolások

Felhasznált tételek:

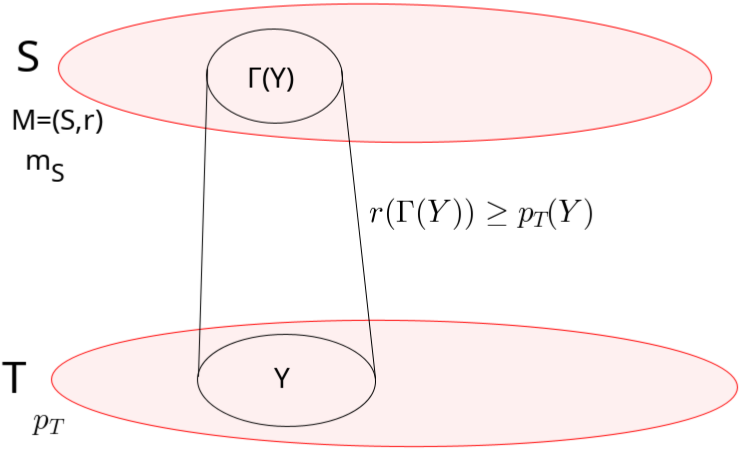
Theorem (Bérczi, Frank)

Adott egy matroid $M = (S, r)$, egy pozitívan metsző szupermoduláris P_T függvény T-n, és egy fokszámelőírás m_S S-en. Mikor akkor létezik olyan egyszerű páros gráf $G = (S, T, E)$, ami M-fedi p_T-t és teljesíti a fokszámelőírást, azaz

$$r(\Gamma(Y)) \geq p_T(Y) \; \forall Y \subseteq T$$

?

Matroid alapú fenyőpakolások



Matroid alapú fenyőpakolások

Theorem (Cs. Király, Szigeti, Tanigawa)

Adott egy $D = (V + s, A)$ digráf, egy M_1 matroid a gyökéréleken, illetve minden $v \in V$-re adott egy M_v matroid a $\partial(v)$-n, M_2 legyen az M_v-k direkt összege. Mikor létezik M_1-alapú M_2-megszorított s-fenyőpakolás?

Szabadgyökerű pakolás:

Theorem

Pontosan akkor tudunk behúzni s-ből V csúcsaiba irányított éleket és ezekre az élekre ráképezni S elemeit úgy, hogy létezzen M_1-alapú M_2-megszorított s-fenyőpakolás, ha

$$(k - r_1(X))q - |S - X| \leq \sum_{i=1}^{q} r_2(\partial(V_i))$$

minden $\{V_1, \ldots, V_q\}$ szubpartíciójára V-nek és $X \subseteq S$-re.

Legyen $M = (S, r)$ egy matroid r rangfüggvénnyel, és legyen $D = (V, A)$ egy n csúcsú digráf, amin legyen adott egy $m_{in} : V \to \mathbb{Z}^+$ befokszámelőírás, amire $0 \leq m_{in}(v) \leq \varrho_D(v)$ és $m_{in}(V) \leq r(M)$ minden $v \in V$ csúcsra, emellett $\widetilde{m}_{in}(V) = |V|r(M) - |S|$ teljesül. Legyen s egy V-n kívüli új csúcs.

Theorem

Ekvivalensek:

(A) *Be tudunk húzni s-ből V csúcsaiba irányított éleket és ezekre az élekre ráképezni S elemeit úgy, hogy létezzen M-alapú s-fenyőpakolás, aminek élhalmaza a gyökéréleken kívül F és $\varrho_F(v) = m_{in}(v)$ teljesül minden $v \in V$-re.*

Theorem

(B1) *Minden* $\{V_1, \ldots, V_q\}$ *szubpartíciójára* V*-nek*

$$(r(M)-r(X))q-|S-X| \le \sum_{v\in\bigcup_{i=1}^{q} V_i} \min\{m_{in}(v), |\partial(v)\cap\partial(V_i)|\}$$

(B2) *Minden* $Y \subseteq V$, $\{V_1, \ldots, V_q\}$ *szubpartíciójára* $V - Y$*-nak és* $X \subseteq S$*-re:*

$$(|Y| + q)(r(M) - r(X)) - |S - X| \le \widetilde{m}_{in}(Y) + \sum_{i=1}^{q} \varrho_D(V_i)$$