Kombinatorikus merevség és alkalmazásai

Villányi Soma
Témavezető: Jordán Tibor

Az elmúlt két félévben gráfok merevségelméletével, ezen belül csúcspárok globális linkeltségével foglalkoztunk a témavezetőmmel, Jordán Tiborral. A $G = (V, E)$ gráfban az $\{u, v\}$ csúcspárt akkor nevezzük gyengén globálisan linkeltnek, ha G-nek van olyan generikus $p : V \to \mathbb{R}^d$ realizációja, hogy minden p-vel ekvivalens $q : V \to \mathbb{R}^d$ realizációra teljesül, hogy $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$. Ha az $\{u, v\}$ pár nem globálisan linkelt, akkor globálisan lazának nevezzük. A globálisan laza párokat először 2006-ban definiálták a szakirodalomban [2], de eddig csak néhány állítás volt ismert róluk. Az előző félév során elért legfontosabb eredményünk a gyenge globális linkeltség polinomális időben tesztelhető jellemzése volt $d = 2$ mellett. A második félévben több új eredmény is született. Az új eredmények többségét az ún. totálisan laza gráfok vizsgálatával értük el. Egy gráfot akkor nevezünk totálisan lazának, ha a gráfban minden nem-szomszédos csúcspár globálisan laza. A totálisan laza merev gráfok struktúrájára vonatkozó eredmények segítségével 5-approximációs algoritmust adtunk arra az optimalizációs problémára, amelynek során egy adott élsúlyozás mellett egy gráf minimális súlyú globálisan merev bővítését keressük $\mathbb{R}^2$-n. Ez egy NP-teljes feladat, amelyre korábban nem volt ismert approximációs algoritmus. Új bizonyítást adtunk Király és Mihálykó minimax tételére, amely leírja, hogy egy merev gráf globálisan merev bővítéséhez minimum hány új él szükséges $\mathbb{R}^2$-n. Szintén a totálisan laza gráfok segítségével bizonyítottuk a gyenge globális linkeltség egy (az előző félévinél bizonyos szempontból erősebb) karakterizációját $\mathbb{R}^2$-n. Ennek következményeként beláttuk, hogy egy $\{u, v\}$ pár akkor és csak akkor gyengén globálisan linkelt G-ben $\mathbb{R}^2$-n, ha $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt a G ún. kúpgráfjában $\mathbb{R}^3$-ban. Mindemellett új bizonyítást adtunk a 2-dimenziós globális merevség jellemzésére. (A bizonyítás során felhasználtuk azt az ismert tételt, hogy a globális merevség generikus tulajdonság.) A korábbi eredmények egy részét általánosítottuk 2-nél magasabb dimenzióra. A magasabb dimenziós eredményeket alkalmazva bebizonyítottunk egy becslést, amely az ún. minimálisan globálisan merev gráfok merev feszített részgráfjainak élszámára vonatkozik.

1. Bevezetés

Legyen d pozitív egész szám. A (G, p) párt a $G = (V, E)$ gráf egy $\mathbb{R}^d$-beli realizációjának nevezzük, ha $p : V \to \mathbb{R}^d$ függvény. A (G, p) és a (G, q) realizációk ekvivalensek, ha minden $uv \in E$ esetén $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$. A két realizáció kongruens, ha a $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$ egyenlőség minden $u, v \in V$ párra teljesül. Ez ekvivalens azzal, hogy $q = \phi \circ p$ az $\mathbb{R}^d$ tér valamilyen ϕ kongruenciájára. Egy (G, p) realizáció globálisan merev, ha minden (G, p)-vel ekvivalens realizáció kongruens vele. (G, p) merev, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy ha (G, q) egy (G, p)-vel ekvivalens realizáció, és minden $v \in V$-re teljesül, hogy $||p(v) - q(v)|| < \varepsilon$, akkor (G, q) és (G, p) kongruensek. Egy realizációról

NP-nehéz eldönteni azt, hogy (globálisan) merev-e. Azonban a feladat kezelhetőbbé válik, ha feltesszük, hogy a realizáció pontjainak koordinátái között nincsen algebrai összefüggés.

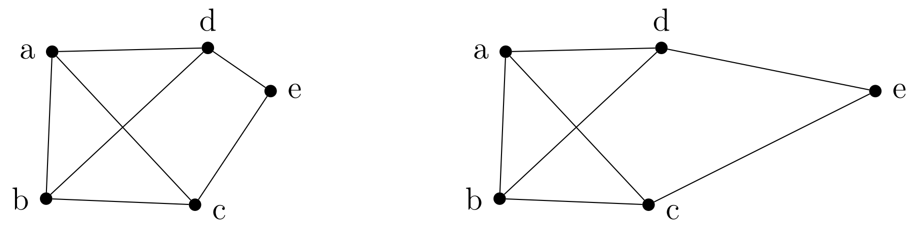
A (G,p) realizáció generikus, ha az a halmaz, amely a $\{p(v)\}_{v\in V}$ pontok koordinátáit tartalmazza, algebrailag független $\mathbb{Q}$ fölött. Ismert, hogy a merevség és a globális merevség generikus tulajdonságok, azaz ha G-nek van generikus (globálisan) merev realizációja $\mathbb{R}^d$-ben, akkor minden generikus realizációja (globálisan) merev $\mathbb{R}^d$-ben. Ennek megfelelően egy gráfot (globálisan) merevnek nevezünk $\mathbb{R}^d$-ben, ha minden generikus realizációja (globálisan) merev, vagy ezzel ekvivalensen, ha létezik (globálisan) merev generikus realizációja. Egy gráf minimálisan (globálisan) merev $\mathbb{R}^d$-ben, ha (globálisan) merev, de tetszőleges élét elhagyva a gráf már nem (globálisan) merev. Egy gráfot redundánsan merevnek nevezünk, ha merev és bármely élét elhagyva merev marad. A $G=(V,E)$ gráf egy $G[V_0]$ feszített részgráfját (és a V_0 részhalmazt) (u,v)-merevnek nevezzük ($u,v\in V$), ha $G[V_0]$-merev és $u,v\in V_0$. A G gráf élhalmazán definiálható a gráf d-dimenziós merevségi matroidja, amelyet $\mathcal{R}_d(G)$-vel jelölünk. Ennek segítségével definiáljuk egy $\{u,v\}$ csúcspár d-dimenziós linkeltségét. A merevségi matroid és a linkeltség definíciója megtalálható [4]-ben.

Könnyen bebizonyítható, hogy az $\mathbb{R}$ egyenesen egy gráf akkor és csak akkor merev, ha összefüggő, és akkor és csak akkor globálisan merev, ha 2-összefüggő. A merevség és a globális merevség karakterizációja $d\geq 3$ mellett nyított probléma. Azonban ha $d=2$, akkor mindkét tulajdonság polinomiális időben tesztelhető. A merevségre vonatkozó eredmény Lovásztól és Yeminitől [7], a globális merevségre vonatkozó eredmény Jacksontól és Jordántól származik [3].

1.1. Tétel. *[3] Legyen G egy gráf legalább négy csúcson. Ekkor G globálisan merev $\mathbb{R}^2$-n akkor és csak akkor, ha G 3-összefüggő és redundánsan merev.*

A $G=(V,E)$ gráf (G,p) realizációjában az $\{u,v\}$ párt ($u,v\in V$) globálisan linkeltnek nevezzük, ha a $||p(u)-p(v)||=||q(u)-q(v)||$ egyenlőség minden (G,p)-vel ekvivalens (G,q) realizációra teljesül. Tehát egy (G,p) realizáció akkor globálisan merev, ha minden $\{u,v\}$ csúcspár globálisan linkelt. A globális linkeltség azonban nem generikus tulajdonság (lásd 1. ábra). Az $\{u,v\}$ csúcspárt globálisan linkeltnek nevezzük, ha G minden generikus realizációjában $\{u,v\}$ globálisan linkelt, gyengén globálisan linkeltnek nevezzük, ha G-nek van olyan generikus realizációja, amelyben $\{u,v\}$ globálisan linkelt, végül globálisan lazának nevezzük, ha $\{u,v\}$ a G semelyik generikus realizációjában sem globálisan linkelt. Tehát egy csúcspár akkor és csak akkor gyengén globálisan linkelt, ha nem globálisan laza. Egy gráfot totálisan lazának nevezünk, ha minden nem-szomszédos csúcspár globálisan laza a gráfban.

A továbbiakban a gyenge globális linkeltséggel kapcsolatos eredményeinkről írok, amelyeket publikálni készülünk [5], és a szakdolgozatomban is megtalálhatók lesznek.



1. ábra. Ugyanannak a gráfnak két különböző realizációja. A bal oldali realizációban $\{c, d\}$ globálisan linkelt. A jobb oldali realizációban $\{c, d\}$ nem globálisan linkelt, mert ha a d csúcsot az ab egyenesre tükrözzük, akkor, az e csúcs pozíciójának alkalmas megváltoztatásával, egy ekvivalens realizációhoz jutunk. A gráfban $\{c, d\}$ gyengén globálisan linkelt, de nem globálisan linkelt.

2. Gyengén globálisan linkelt párok tulajdonságai $\mathbb{R}^d$-ben

Egy globálisan merev gráfban az uv élt kritikusnak nevezzük, ha $G - uv$ nem globálisan merev. A következő két lemma a gyengén globális linkelt csúcspárok és a globálisan merev gráfok szoros kapcsolatát mutatja.

2.1. Lemma. *[2, Lemma 7.1] Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $uv \notin E$, és hogy G-nek létezik olyan $\mathbb{R}^d$-ben globálisan merev szupergráfja, amelyben az uv egy kritikus él. Ekkor $\{u, v\}$ globálisan laza G-ben $\mathbb{R}^d$-ben.*

A 2.1 Lemmából néhány sorban levezethetők a következő állítások, amelyek fontos szerepet játszottak az alkalmazásokban. Egy $G = (V, E)$ gráf és $d \geq 1$ egész szám esetén legyen

$$J_d(G) = \{uv : u, v \in V, uv \notin E, \{u, v\} \text{ gyengén globálisan linkelt } G\text{-ben } \mathbb{R}^d\text{-ben}\}.$$

2.2. Lemma. *$G = (V, E)$ gráf, F élhalmaz a V csúcshalmazon. Ekkor*
(a) ha $G + J_d(G) + F$ globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben, akkor $G + F$ globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben,
(b) ha $G + uv$ globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben valamely $uv \in J_d(G)$ esetén, akkor G globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben,
(c) G akkor és csak akkor globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben, ha G-ben minden csúcspár gyengén globálisan linkelt $\mathbb{R}^d$-ben.

Érdemes még megemlíteni a globális lazaság alábbi két elégséges feltételét, amelyek gyakran előkerülnek a gyenge globális linkeltség vizsgálatakor. A G gráfban $\kappa_G(u, v)$ jelöli a belsőleg csúcsdiszjunkt u-v-utak maximális számát.

2.3. Lemma. *$G = (V, E)$ gráf, $u, v \in V$ két nem-szomszédos csúcs. Ha $\{u, v\}$ nem linkelt G-ben $\mathbb{R}^d$-ben, akkor $\{u, v\}$ globálisan laza G-ben $\mathbb{R}^d$-ben.*

2.4. Lemma. *$G = (V, E)$ gráf, $u, v \in V$ két nem-szomszédos csúcs. Ha $\kappa_G(u, v) \leq d$, akkor $\{u, v\}$ globálisan laza G-ben $\mathbb{R}^d$-ben.*

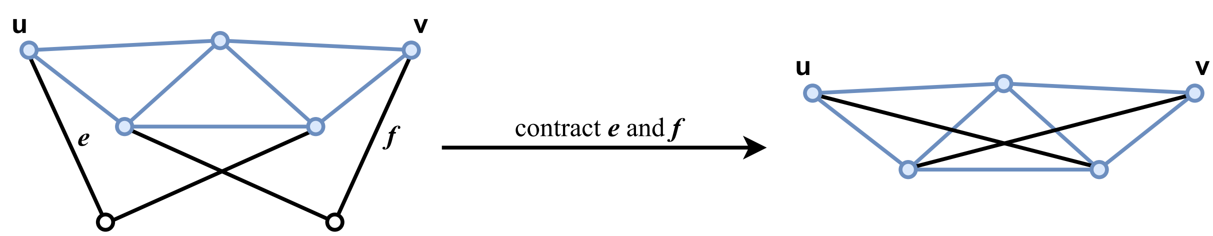
3. Egy elégséges feltétel a gyenge globális linkeltségre $\mathbb{R}^d$-ben

3.1. Gyenge globális linkeltség és gráfműveletek

Egy $G = (V, E)$ gráfban a $V_0 \subseteq V$ csúcshalmaz *összehúzásán* azt az operációt értjük, amelynek során megfeleltetjük egymásnak a V_0 összes pontját és eltávolítjuk az esetlegesen keletkező párhuzamos éleket és hurokéleket. A kapott gráfot G/V_0-val jelöljük. Egy $e = uv$ él összehúzásán az $\{u, v\}$ csúcshalmaz összehúzását értjük, és a kapott gráfot G/e-vel jelöljük. Lásd 2 ábra. A következő állítások, amelyeknek alapvető jelentőségük van a gyenge globális linkeltség vizsgálatában, azt mutatják, hogy bizonyos élek és csúcshalmazok összehúzása nem befolyásolja az $\{u, v\}$ csúcspár gyenge globális linkeltségét vagy globális lazaságát.

3.1. Lemma. *$G = (V, E)$ gráf, $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $G[V_0]$ egy (u, v)-merev részgráfja G-nek. Legyen $e = (s_1, s_2) \in E - E(G[V_0])$ egy él. Ha $\{u, v\}$ gyengén globális linkelt (G/e)-ben $\mathbb{R}^d$-ben, akkor $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt G-ben $\mathbb{R}^d$-ben.*

3.2. Következmény. *$G = (V, E)$ gráf, $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy létezik egy $V_0 \subset V$ részhalmaz, amelyre $G[V_0]$ egy (u, v)-merev részgráfja G-nek $\mathbb{R}^d$-ben, és van egy u-v út G-ben, amely belsőleg diszjunkt V_0-tól. Ekkor $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt G-ben $\mathbb{R}^d$-ben.*



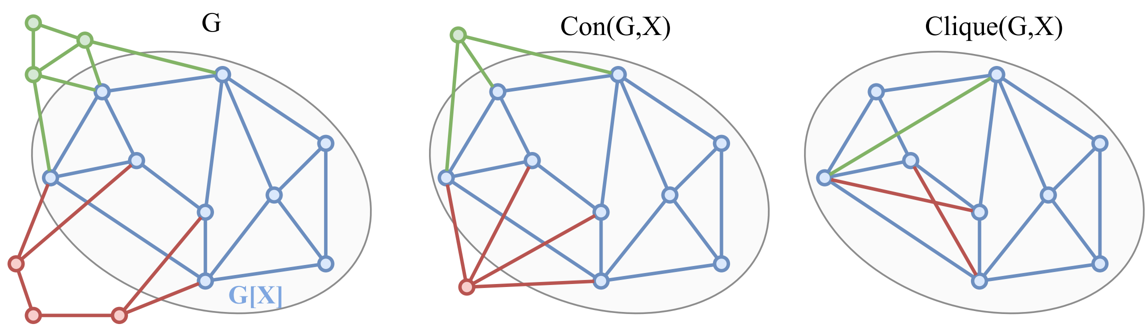
2. ábra. Tekintsük a bal oldali gráfot. Az e és f élek összehúzása globálisan merev gráfot eredményez $\mathbb{R}^2$-ben. A kék részgráf merev $\mathbb{R}^2$-ben, és így a 3.1 Lemma szerint $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt $\mathbb{R}^2$-ben. Ez azt mutatja, hogy a 3.2 Következmény elégséges feltétele nem szükséges.

3.3. Lemma. *$G = (V, E)$ gráf, $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $G[V_0]$ egy (u, v)-merev részgráfja G-nek. Legyen V_1 egy komponens csúcshalmaza a $G - V_0$ gráfban. Ha $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt G-ben $\mathbb{R}^d$-ben, akkor $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt G/V_1-ben $\mathbb{R}^d$-ben.*

3.1. Tétel. *$G = (V, E)$ gráf, $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $G[V_0]$ egy (u, v)-merev részgráfja G-nek. Legyen $e = (s_1, s_2) \in E$ egy él, amelyre $s_1, s_2 \notin V_0$. Ekkor $\{u, v\}$ akkor és csak akkor gyengén globálisan linkelt (G/e)-ben $\mathbb{R}^d$-ben, ha $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt G-ben $\mathbb{R}^d$-ben.*

3.2. Egy elégséges feltétel $\mathbb{R}^d$-ben

Ebben a szakaszban egy elégséges feltételt adunk a gyenge globális linkeltségre $\mathbb{R}^d$-ben. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $\emptyset \neq X \subseteq V$. Jelölje $V_1, V_2, \ldots, V_r$ a $G - X$ összefüggő komponenseinek csúcshalmazait. A $\mathrm{Con}(G, X)$ gráfot úgy kapjuk, hogy a V_i csúcshalmazokat összehúzzuk egyetlen v_i csúccsá, $1 \leq i \leq r$. A $\mathrm{Clique}(G, X)$ gráfot úgy kapjuk, hogy töröljük a V_i csúcshalmazokat, $1 \leq i \leq r$, majd hozzáadunk a kapott gráfhoz egy-egy új xy élet minden olyan $x, y \in N_G(V_i)$ párra, amelyre $xy \notin E$, $1 \leq i \leq r$. Lásd 3 ábra.



3. ábra. Példa egy G gráfra és a $\mathrm{Con}(G, X)$ és $\mathrm{Clique}(G, X)$ gráfokra. A $G[X]$ részgráf kék színnel van színezve.

3.4. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy $(d + 1)$-összefüggő gráf. Tegyük fel, hogy $G[V_0]$ merev részgráfja G-nek, $V_0 \subseteq V$. Ekkor* $\mathrm{Clique}(G, V_0)$ *akkor és csak akkor globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben, ha* $\mathrm{Con}(G, V_0)$ *globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben.*

3.2. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy $(d + 1)$-összefüggő gráf, $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $G[V_0]$ egy (u, v)-merev részgráfja G-nek $\mathbb{R}^d$-ben. Ha* $\mathrm{Clique}(G, V_0)$ *globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben, akkor $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt G-ben $\mathbb{R}^d$-ben.*

A 3.2 tétel 2-dimenziós változatának segítségével új bizonyítást adtunk arra, hogy az 1.1 Tétel feltételei elégségesek. A bizonyítás során felhasználtuk azt az ismert tételt, hogy a globális merevség generikus tulajdonság.

4. Globálisan laza csúcspárok a síkon

Ennek a szakasznak a célja azoknak az eredményeknek az ismertetése, amelyek szükségesek a gyenge globális linkeltség polinomiális idejű teszteléséhez a síkon. Az előző szakaszban láttunk egy elégséges feltételt a gyenge globális linkeltségre $(d+1)$-összefüggő gráfokban $\mathbb{R}^d$-ben. Kiderült, hogy $\mathbb{R}^2$-ben ez a feltétel a megfelelő formában szükséges is. A 2.3 Lemma szerint elegendő a G linkelt $\{u, v\}$ csúcspárjait vizsgálni. Egy linkelt $\{u, v\}$ csúcspárra létezik olyan $G_0 = (V_0, E_0)$ részgráfja G-nek, amelyre $u, v \in V_0$ és $G_0 + uv$ egy $\mathcal{R}_2$-kör.

4.1. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy 3-összefüggő gráf, $u, v \in V$, $uv \notin E$. Tegyük fel, hogy $G_0 = (V_0, E_0)$ egy olyan részgráfja G-nek, amelyre $u, v \in V_0$ és $G_0 + uv$ egy $\mathcal{R}_2$-kör. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) $\{u, v\}$ *gyengén globálisan linkelt G-ben $\mathbb{R}^2$-ben,*

(ii) $\mathrm{Clique}(G, V_0)$ *globálisan merev $\mathbb{R}^2$-ben,*

(iii) $\mathrm{Con}(G, V_0)$ *globálisan merev $\mathbb{R}^2$-ben.*

Az alábbi lemma segítségével az általános eset visszavezethető a 3-összefüggő esetre. Az (a, b) csúcspárt a G gráf 2-szeparátorának nevezzük, ha a $G - a - b$ gráf nem összefüggő.

4.1. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy 2-összefüggő gráf, $\{u, v\}$ egy linkelt csúcspár G-ben. Tegyük fel, hogy (a, b) egy 2-szeparátor G-ben. Legyen C egy összefüggő komponense a $G - a - b$ gráfnak, és legyen $V_0 = V(C) \cup \{a, b\}$. Tegyük fel, hogy $u, v \in V_0$. Az $\{u, v\}$ pár akkor és csak akkor gyengén globálisan linkelt G-ben, ha $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt a $G[V_0] + ab$ gráfban.*

A gyenge globális linkeltségre explicit jellemzés is adható. Legyen G egy 2-összefüggő gráf, és legyen $\bar{G}$ az a gráf, amelyet G-ből úgy kapunk, hogy összekötjük az összes olyan nem-szomszédos $a, b \in V$ csúcspárt, amelyre (a, b) 2-szeparátor G-ben. A $\bar{G}$ maximális olyan részgráfjait, amelyek nem tartalmaznak 2-szeparátorokat, a G 3-blokkjainak nevezzük. Ezek háromszög gráfok vagy 3-összefüggő gráfok. Belátható, hogy ha $\kappa_G(u, v) \geq 3$ és (u, v) nem egy 2-szeparátor, akkor pontosan egy olyan 3-blokkja van G-nek, amely tartalmazza u-t és v-t. Ezt az $\{u, v\}$ 3-blokkjának nevezzük G-ben.

4.2. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy 2-összefüggő gráf, $\{u, v\}$ egy nem-szomszédos linkelt csúcspár, $\kappa_G(u, v) \geq 3$. Ekkor $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt G-ben akkor és csak akkor, ha*
(i) (u, v) *2-szeparátor G-ben, vagy*
(ii) $\mathrm{Clique}(B, V_0)$ *globálisan merev,*
ahol B az $\{u, v\}$ 3-blokkja G-ben, és $B_0 = (V_0, E_0)$ egy olyan részgráfja B-nek, amelyre $u, v \in V_0$ és $B_0 + uv$ egy $\mathcal{R}_2$-kör.

A 4.2 Tétel alapján belátható, hogy egy $G = (V, E)$ gráfban egy adott $\{u, v\}$ pár gyenge globális linkeltsége $\mathbb{R}^2$-ben $O(|V|^2)$ időben eldönthető.

5. Totálisan laza gráfok

Egy gráfot akkor nevezünk totálisan lazának, ha minden nem-szomszédos csúcspár globálisan laza a gráfban. Egy G gráfot akkor nevezünk SNGR (saturated non-globally-rigid - telített nem globálisan merev) gráfnak, ha G nem globálisan merev, de bármely nem-szomszédos csúcspár összekötésével G globálisan merevvé válik. Az SNGR gráfok totálisan lazák (lásd 2.1 Lemma). A G gráfot R-special (ill. MR-special) gráfnak nevezzük $\mathbb{R}^d$-ben, ha G merev (ill. minimálisan merev), és nincsen olyan valódi, nem teljes részgráfja, amely merev $\mathbb{R}^d$-ben.

Legyen $G_i = (V_i, E_i)$ egy gráf, $t \geq 1$ egy egész szám, és tegyük fel, hogy K_i egy teljes részgráfja G_i-nek t csúccsal, $i = 1, 2$. Ekkor a *t-klikk-összeg* művelet a G_1 és G_2 gráfokon, K_1 és K_2 mentén egy új gráfot eredményez, amelyben a K_1 csúcsait a K_2 csúcsaival egy bijekció segítségével azonosítjuk. Egy műveletet *klikk-összeg* műveletnek nevezünk, ha t-klikk-összeg művelet valamilyen $t \geq 1$-re. A totálisan laza merev gráfok struktúrájáról az alábbi állítás mondható $\mathbb{R}^d$-ben.

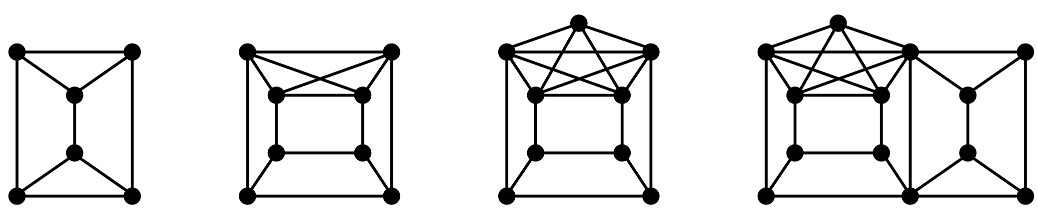
5.1. Tétel. *Legyen G egy totálisan laza merev gráf $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor G előállítható d-dimenziós R-special gráfokból klikk-összeg műveletek segítségével.*

$\mathbb{R}^2$-n az imént definiált gráfosztályokkal kapcsolatban további eredményeket értünk el.

5.1. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy R-special gráf $\mathbb{R}^2$-n. Ekkor a következő állítások egyike teljesül:*
(i) G teljes gráf,
(ii) $G = K_4 - e$,
(iii) G egy 3-összefüggő SNGR gráf $\mathbb{R}^2$-n.

A fenti lemmából $\mathbb{R}^2$-n az alábbi tartalmazások következnek, lásd 4 ábra.

$$\text{MR-special} \subseteq \text{R-special} \subseteq \text{SNGR vagy teljes} \subseteq \text{totálisan laza}$$



4. ábra. Egy MR-special, egy R-special, egy SNGR és egy totálisan laza gráf $\mathbb{R}^2$-n. Ezek a példák mutatják, hogy a fenti tartalmazások szigorúak.

Tekintsünk egy t-klikk-összeg műveletet a $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ gráfokon, a K_1, K_2 klikkek mentén; $t \geq 2$ és $K_i \subseteq G_i$, $i = 1, 2$. Ezt a műveletet *megszorított klikk-összeg* műveletnek nevezzük, ha $t = 2$, vagy ha $t \geq 3$ és létezik $i \in \{1, 2\}$, amelyre K_i maximális klikk G_i-ben.

A totálisan laza merev gráfokat $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi tétel jellemzi.

5.2. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy összefüggő gráf. Ekkor G totálisan laza merev gráf $\mathbb{R}^2$-ben akkor és csak akkor, ha G előállítható 3-összefüggő SNGR gráfokból és teljes gráfokból megszorított klikk-összeg műveletek sorozatával.*

6. Gyenge globális linkeltség és kúpgráfok

A G gráf kúpgráfját úgy kapjuk meg, hogy a G csúcshalmazához hozzáveszünk egy új w csúcsot, és a w-t a G összes többi csúcsával összekötjük. Ezt a gráfot $G * w$-vel jelöljük.

6.1. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Az $\{u, v\}$ csúcspár akkor és csak akkor gyengén globálisan linkelt G-ben $\mathbb{R}^2$-n, ha $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt a $G * w$ gráfban $\mathbb{R}^3$-ban.*

Ebben a szakaszban a fenti tétel bizonyításáról mondok néhány szót. Az 5. szakasz eredményeinek felhasználásával sikerült bizonyítani a gyenge globális linkeltség alábbi karakterizációját $\mathbb{R}^2$-n.

6.2. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $u, v \in V$. Ekkor $\{u, v\}$ akkor és csak akkor gyengén globálisan linkelt $\mathbb{R}^2$-n, ha létezik olyan $n \geq 0$ egész szám és $(G^0, G^1, \ldots, G^n)$ gráfsorozat, amelyre $G^0 = G$, G^n globálisan merev $\mathbb{R}^2$-n, és minden $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén létezik valódi $\mathbb{R}^2$–n (u, v)-merev H^i feszített részgráfja G^i-nek, amelyre létezik egy olyan $e^i \in E(G^i) - E(H^i)$ él, hogy $G^{i+1} = G^i / e^i$.*

Az alábbi tétel szintén karakterizálja a gyenge globális linkeltséget, de a globális lazaság felől nézve. Ez a 4. szakasz eredményeinek felhasználásával bizonyítható.

6.3. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $u, v \in V$. Ekkor $\{u, v\}$ akkor és csak akkor globálisan laza $\mathbb{R}^2$-n, ha $\{u, v\}$ nem linkelt vagy ha létezik olyan B részgráfja G-nek, amelyre $u, v \in V(B)$, $uv \notin E(\mathrm{Clique}(G, B))$ és a $\mathrm{Clique}(G, B)$ gráfnak létezik olyan globálisan merev szupergráfja, amelyben az uv egy kritikus él.*

A 6.2 és 6.3 tételekben a feltételek magasabb dimenzióban is elégségesek, és ez a 2. és 3. szakaszok alapján könnyen bizonyítható. (A feltételek szükségességének bizonyítása $\mathbb{R}^2$-n már korántsem triviális.) Homályosan fogalmazva azt mondhatjuk, hogy a fenti két tétel szerint az $\{u, v\}$ pár gyenge globális linkeltségét vagy globális lazaságát a G gráfban $\mathbb{R}^2$-n tanúsítja a G gráf (globálisan) merev részgráfjainak és szupergráfjainak (és részgráfjainak szupergráfjainak) egy megfelelő rendszere. Ismert, hogy egy G gráf akkor és csak akkor (globálisan) merev $\mathbb{R}^2$-n, ha $G * w$ (globálisan) merev $\mathbb{R}^3$-ban. Mindezek alapján a 6.1 tétel már könnyen bizonyítható.

7. Globálisan merev bővítések

Egy másik terület, ahol a totálisan laza gráfokat és az 5. szakasz eredményeit alkalmazni tudtuk, az az optimalizációs probléma volt, amelynek során egy gráf minimális globálisan merev bővítését keressük $\mathbb{R}^2$-n. Ennek a problémának több különböző változata van. Tekintsük a következő változatot, amelyben egy minimális súlyú globálisan merev bővítést keresünk.

(A) Adott egy tetszőleges $G = (V, E_0 \cup E')$ gráf és egy $w : E' \to \mathbb{R}^+$ súlyfüggvény. A célunk egy olyan $E_1 \subseteq E'$ részhalmaz keresése, amelyre a $(V, E_0 \cup E_1)$ gráf globálisan merev $\mathbb{R}^2$-n és $w(E_1) = \sum_{e \in E_1} w(e)$ minimális.

Ez egy NP-teljes feladat, amelyre korábban nem volt ismert approximációs algoritmus. Legyen

$$J_2(G) = \{uv : u, v \in V, uv \notin E, \{u, v\} \text{ gyengén globálisan linkelt } G\text{-ben } \mathbb{R}^2\text{-ben}\}.$$

Bebizonyítható, hogy a $G + J_2(G)$ gráf totálisan laza $\mathbb{R}^2$-ben. Ezt a gráfot a G totálisan laza lezártjának nevezzük és $\mathrm{tlc}_2(G)$-vel jelöljük. Figyeljük meg, hogy a 2.2 Lemma (a) része szerint az **(A)** feladattal ekvivalens az a feladat, amelynek során a G helyett a $\mathrm{tlc}_2(G)$ gráfnak keressük egy minimális súlyú bővítését. Így az **(A)** feladat visszavezethető totálisan laza input gráfokra.

A totálisan laza merev gráfok struktúrájára vonatkozó eredmények segítségével a feladatra egy 5-approximációs algoritmust adtunk. Ez jár némi technikai nehézséggel, aminek a részletezésétől most tekintsünk el. Az algoritmus lényege az, hogy a 5.2 Tétel egy erősebb változatának alkalmazásával az **(A)** feladat totálisan laza merev input gráf mellett visszavezethető az alábbi problémára.

(B) Adott egy $T = (U, F_0)$ fagráf, egy F' élhalmaz az U csúcshalmazon, egy $w : F' \to \mathbb{R}^+$ súlyfüggvény és $X, Y \subseteq U$ csúcshalmazok. A célunk egy olyan $F_1 \subseteq F'$ élhalmaz keresése, amelyre az $(U, F_0 \cup F_1)$ gráfban az $x \in X$ csúcsok egyike sem elvágó csúcs, és az $y \in Y$ csúcsok mindegyike benne van egy körben.

A **(B)** feladat két részfeladatra bontható. Az egyikben az X halmazra vonatkozó követelményeket kell teljesíteni, a másikban pedig az Y halmazra vonatkozó követelményeket. Mindkét részfeladatra adható 2-approximációs algoritmus, így a **(B)** feladatra adható egy 4-approximációs algoritmus. Az **(A)** feladat megoldható úgy, hogy megkeressük a G gráf egy minimális súlyú merev bővítését (ez polinomiális időben megtehető), majd a kapott merev gráf totálisan laza lezártjának megkeressük egy minél kisebb súlyú globálisan merev bővítését (erre a **(B)** feladat alapján létezik 4-approximációs algoritmus). Így a minimális súlyú globálisan merev bővítés feladatra egy 5-approximációs algoritmust kapunk.

A globálisan merev bővítés feladat egy másik változatában minden új él súlya egységnyi és bármely két nem-szomszédos csúcspárt összeköthetjük. Király és Mihálykó bebizonyította, hogy ez a feladat merev input gráfra polinomiális időben megoldható, és a szükséges új élek számának leírására egy minimax tételt is adtak [6]. A 5.2 Tétel egy erősebb változatának alkalmazásával erre a minimax tételre egy (a korábbinál talán egyszerűbb) új bizonyítást és egy új polinomiális algoritmust adtunk.

8. Minimálisan globálisan merev gráfok

Zárásképpen megemlítem a gyenge globális linkeltség egy d-dimenziós alkalmazását.

Egy $G = (V, E)$ gráf *minimálisan globálisan merev* $\mathbb{R}^d$-ben, ha globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben, és minden $e \in E$ élre teljesül, hogy $G - e$ nem globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben. A [1] cikkben a szerzők bebizonyították, hogy ha $G = (V, E)$ minimálisan globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben, és

$|V| \geq d+1$, akkor

$$|E| \leq (d+1)|V| - \binom{d+2}{2}.$$

Ezenkívül a szerzők azt sejtették (és be is bizonyították $d = 1, 2$ esetén), hogy egy minimálisan globálisan merev gráf $\mathbb{R}^d$-ben $\mathcal{R}_{d+1}$-független, lásd [1, Conjecture 1]. Ha ez a sejtés igaz, akkor következne, hogy egy $G = (V, E)$ minimálisan globálisan merev gráf nem csak ritka, hanem minden részgráfja is ritka: minden $U \subseteq V$, $|U| \geq d+1$ esetén $|E(U)| \leq (d+1)|U| - \binom{d+2}{2}$.

A sejtésnek ezt a gyengébb változatát a gyenge globális linkeltség segítségével igazoltuk abban a speciális esetben, amikor $G[U]$ merev $\mathbb{R}^d$-ben.

8.1. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy minimálisan globálisan merev gráf. Tegyük fel, hogy $U \subseteq V$, $|U| \geq d+1$ és $G[U]$ merev. Ekkor $|E(U)| \leq (d+1)|U| - \binom{d+2}{2}$.*

Hivatkozások

[1] D. Garamvölgyi, T. Jordán. Minimally globally rigid graphs, *European J. Combin.*, Vol. **108**, 103626, (2023).

[2] B. Jackson, T. Jordan, Z. Szabadka. Globally Linked Pairs of Vertices in Equivalent Realizations of Graphs, *Discrete Comput Geom* **35**, 493-512 (2006).

[3] B. Jackson, T. Jordan. Connected rigidity matroids and unique realization graphs, *J. Combin. Theory Ser.* B, **94**, pp. 177-203 (2005).

[4] T. Jordán. Combinatorial rigidity: graphs and matroids in the theory of rigid frameworks. In: Discrete Geometric Analysis, *MSJ Memoirs*, vol. **34**, pp. 33-112, (2016).

[5] T. Jordán, S. Villányi. Globally linked pairs of vertices in generic frameworks, Manuscript in preparation.

[6] C. Király, A. Mihálykó. Globally rigid augmentation of rigid graphs, *SIAM J. Disc. Math.* **36**(4): 2473–2496, (2022).

[7] L. Lovász, Y. Yemini. On generic rigidity in the plane, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **2**(1), pp. 91-98 (1982).