Gyengén globálisan linkelt csúcspárok

Villányi Soma
Témavezető: Jordán Tibor

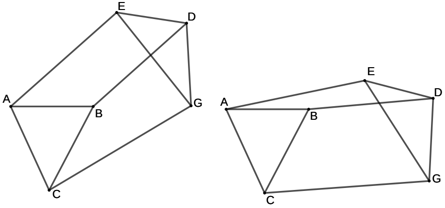
2023. június 1.

Alapfogalmak

A (G, p) párt a $G = (V, E)$ gráf (d-dimenziós) **realizáció**jának nevezzük, ha $p : V \to \mathbb{R}^d$ függvény.

(G, p) és (G, q) **ekvivalens**, ha minden $uv \in E$ esetén $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$.

(G, p) és (G, q) **kongruens**, ha minden $u, v \in V$ csúcspárra $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$.



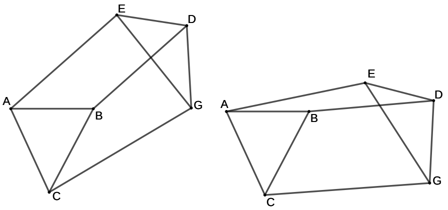
Ugyanannak a gráfnak két ekvivalens, de inkongruens realizációja.

Alapfogalmak

A (G, p) párt a $G = (V, E)$ gráf (d-dimenziós) **realizáció**jának nevezzük, ha $p : V \to \mathbb{R}^d$ függvény.

(G, p) és (G, q) **ekvivalens**, ha minden $uv \in E$ esetén $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$.

(G, p) és (G, q) **kongruens**, ha minden $u, v \in V$ csúcspárra $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$.



Ugyanannak a gráfnak két ekvivalens, de inkongruens realizációja.

A (G, p) realizáció **globálisan merev**, ha minden (G, p)-vel ekvivalens realizáció kongruens (G, p)-vel.

A (G, p) realizáció **merev**, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy ha (G, q) egy (G, p)-vel ekvivalens realizáció, és minden $v \in V$-re teljesül, hogy $||p(v) - q(v)|| < \varepsilon$, akkor (G, q) és (G, p) kongruensek.

Alapfogalmak

Egy realizációról NP-nehéz eldönteni, hogy (globálisan) merev-e.

Segít, ha feltesszük, hogy a realizáció "kellően általános helyzetű".

Alapfogalmak

Egy realizációról NP-nehéz eldönteni, hogy (globálisan) merev-e.

Segít, ha feltesszük, hogy a realizáció "kellően általános helyzetű".

A (G, p) realizáció **generikus**, ha az a halmaz, amely a $p(v)$ $(v \in V)$ pontok koordinátáit tartalmazza, algebrailag független $\mathbb{Q}$ fölött.

A merevség és a globális merevség generikus tulajdonságok:

G-nek van (globálisan) merev generikus realizációja $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ G-nek minden generikus realizációja (globálisan) merev

Ekkor G-t (globálisan) merevnek nevezzük.

Alapfogalmak

Egy realizációról NP-nehéz eldönteni, hogy (globálisan) merev-e.

Segít, ha feltesszük, hogy a realizáció "kellően általános helyzetű".

A (G, p) realizáció **generikus**, ha az a halmaz, amely a $p(v)$ $(v \in V)$ pontok koordinátáit tartalmazza, algebrailag független $\mathbb{Q}$ fölött.

A merevség és a globális merevség generikus tulajdonságok:

G-nek van (globálisan) merev generikus realizációja $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ G-nek minden generikus realizációja (globálisan) merev

Ekkor G-t (globálisan) merevnek nevezzük.

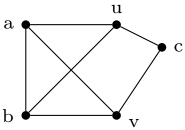
Egy gráf (globális) merevsége polinomiális időben tesztelhető a síkon.

Globálisan linkelt csúcspárok realizációkban

Definíció (Jackson, Jordán, Szabadka, 2006)

A (G, p) realizációban az $\{u, v\}$ csúcspárt **globálisan linkelt**nek nevezzük, ha $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$ minden (G, p)-vel ekvivalens (G, q) realizációra.

Ebben a realizációban $\{u, v\}$ globálisan linkelt:

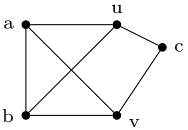


Globálisan linkelt csúcspárok realizációkban

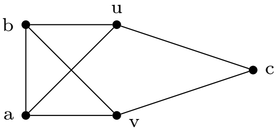
Definíció (Jackson, Jordán, Szabadka, 2006)

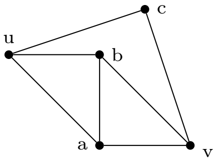
A (G, p) realizációban az $\{u, v\}$ csúcspárt **globálisan linkelt**nek nevezzük, ha $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$ minden (G, p)-vel ekvivalens (G, q) realizációra.

Ebben a realizációban $\{u, v\}$ globálisan linkelt:



Ebben a realizációban $\{u, v\}$ nem globálisan linkelt:





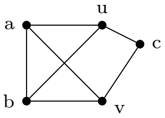
$\Rightarrow$ Két csúcs globális linkeltsége nem generikus tulajdonság.

Gyengén globálisan linkelt csúcspárok egy gráfban

Definíció (Jackson, Jordán, Szabadka, 2006)

A G gráfban az $\{u, v\}$ csúcspár

- **globálisan linkelt**, ha G **minden** generikus realizációjában $\{u, v\}$ globálisan linkelt;
- **gyengén globálisan linkelt**, ha G-nek **létezik** olyan generikus realizációja, amelyben $\{u, v\}$ globálisan linkelt;
- **globálisan laza**, ha G-nek **nem létezik** olyan generikus realizációja, amelyben $\{u, v\}$ globálisan linkelt.



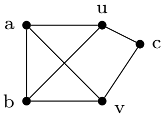
Ebben a gráfban $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt (de nem globálisan linkelt), $\{a, c\}$ globálisan laza.

Gyengén globálisan linkelt csúcspárok egy gráfban

Definíció (Jackson, Jordán, Szabadka, 2006)

A G gráfban az $\{u, v\}$ csúcspár

- **globálisan linkelt**, ha G **minden** generikus realizációjában $\{u, v\}$ globálisan linkelt;
- **gyengén globálisan linkelt**, ha G-nek **létezik** olyan generikus realizációja, amelyben $\{u, v\}$ globálisan linkelt;
- **globálisan laza**, ha G-nek **nem létezik** olyan generikus realizációja, amelyben $\{u, v\}$ globálisan linkelt.



Ebben a gráfban $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt (de nem globálisan linkelt), $\{a, c\}$ globálisan laza.

Tétel

A $G = (V, E)$ gráfban egy adott $\{u, v\}$ csúcspárról $O(|V|^2)$ időben eldönthető, hogy gyengén globálisan linkelt-e $\mathbb{R}^2$-n.

Alkalmazás: globálisan merev bővítések

Minimális súlyú globálisan merev bővítés feladat

Adott egy $G = (V, E_0)$ gráf, egy $E' \subseteq V \times V$ élhalmaz és egy $w : E' \to \mathbb{R}^+$ súlyfüggvény. Keressünk olyan $E_1 \subseteq E'$ élhalmazt, amelyre a $G + E_1$ gráf globálisan merev $\mathbb{R}^2$-n és $w(E_1) = \sum_{e \in E_1} w(e)$ minimális.

A fenti feladat NP-teljes, és eddig nem volt rá ismert approximációs algoritmus.

A gyengén globálisan linkelt párok segítségével 5-approximációs algoritmus adható.

A feladat visszavezethető **totálisan laza** input gráfokra.

Alkalmazás: globálisan merev bővítések

Minimális súlyú globálisan merev bővítés feladat

Adott egy $G = (V, E_0)$ gráf, egy $E' \subseteq V \times V$ élhalmaz és egy $w : E' \to \mathbb{R}^+$ súlyfüggvény. Keressünk olyan $E_1 \subseteq E'$ élhalmazt, amelyre a $G + E_1$ gráf globálisan merev $\mathbb{R}^2$-n és $w(E_1) = \sum_{e \in E_1} w(e)$ minimális.

A fenti feladat NP-teljes, és eddig nem volt rá ismert approximációs algoritmus.

A gyengén globálisan linkelt párok segítségével 5-approximációs algoritmus adható.

A feladat visszavezethető **totálisan laza** input gráfokra.

Definíció

Egy gráfot **totálisan lazának** nevezünk, ha minden nem-szomszédos csúcspár globálisan laza.

Tétel

Legyen

$$J(G) = \{uv : u, v \in V, uv \notin E, \{u, v\} \text{ gyengén globálisan linkelt } G\text{-ben } \mathbb{R}^2\text{-n}\}.$$

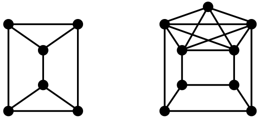
$G + J(G)$ totálisan laza $\mathbb{R}^2$-n.

$G + J(G) + E_1$ akkor és csak akkor globálisan merev $\mathbb{R}^2$-n, ha $G + E_1$ globálisan merev $\mathbb{R}^2$-n.

Alkalmazás: globálisan merev bővítések

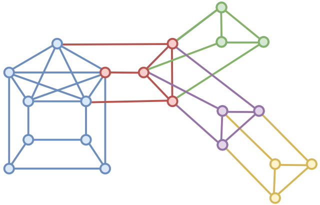
Definíció

Egy G gráfot TNGM (telített nem globálisan merev) gráfnak nevezünk, ha G nem globálisan merev, de bármely nem-szomszédos csúcspár összekötésével G globálisan merevvé válik.

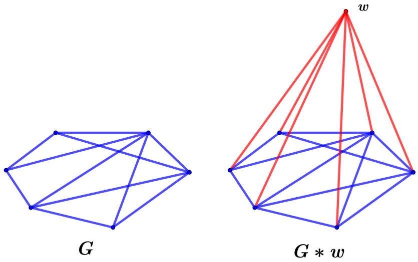


Tétel

Minden 3-összefüggő totálisan laza merev gráf előállítható 3-összefüggő TNGM gráfokból klikk-összeg műveletekkel.



Gyenge globális linkeltség és kúpgráfok

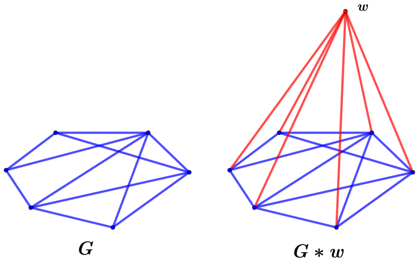


Egy G gráf és a kúpgráfja, $G * w$.

Tétel (Whiteley, 1983; Connelly, Whiteley, 2009)

G (globálisan) merev $\mathbb{R}^d$-ben $\quad\Leftrightarrow\quad$ $G * w$ (globálisan) merev $\mathbb{R}^{d+1}$-ben

Gyenge globális linkeltség és kúpgráfok



Egy G gráf és a kúpgráfja, $G * w$.

Tétel (Whiteley, 1983; Connelly, Whiteley, 2009)

G (globálisan) merev $\mathbb{R}^d$-ben $\quad \Leftrightarrow \quad$ $G * w$ (globálisan) merev $\mathbb{R}^{d+1}$-ben

Tétel

$G = (V, E)$ gráf, $u, v \in V$.

$\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt G-ben $\mathbb{R}^2$-n

$$\Leftrightarrow$$

$\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt a $G * w$ gráfban $\mathbb{R}^3$-ban

Elégséges feltétel d-dimenzióban

Tétel (Elégséges feltétel a gyenge globális linkeltségre)

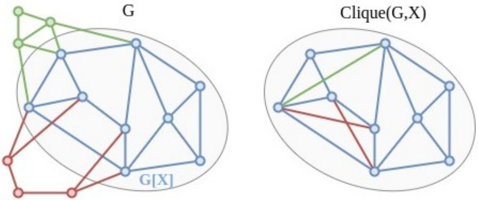
Legyen $G = (V, E)$ egy $(d+1)$-összefüggő gráf, $u, v \in V$, $\{u, v\} \subseteq X \subseteq V$.
Tegyük fel, hogy $G[X]$ merev $\mathbb{R}^d$-ben.

Módosítsuk G-t a következőképpen:

A $G - X$ minden C komponensére

- egészítsük ki teljessé a $G[N_G(V(C)]$ részgráfot, és
- töröljük a $V(C)$ halmazt a gráfból.

Ha a kapott gráf globálisan merev a $\mathbb{R}^d$-ben, akkor $\{u, v\}$ gyengén globálisan linkelt G-ben $\mathbb{R}^d$-ben.



Egy d-dimenziós alkalmazás

Definíció

A $G = (V, E)$ gráf **minimálisan globálisan merev** $\mathbb{R}^d$-ben, ha globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben, és minden $e \in E$ élre teljesül, hogy $G - e$ nem globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben.

Tétel (Garamvölgyi, Jordán, 2023)

Legyen $G = (V, E)$ egy minimálisan globálisan merev gráf, $|V| \geq d + 1$. Ekkor

$$|E| \leq (d+1)|V| - \binom{d+2}{2}.$$

Egy d-dimenziós alkalmazás

Definíció

A $G = (V, E)$ gráf **minimálisan globálisan merev** $\mathbb{R}^d$-ben, ha globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben, és minden $e \in E$ élre teljesül, hogy $G - e$ nem globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben.

Tétel (Garamvölgyi, Jordán, 2023)

Legyen $G = (V, E)$ egy minimálisan globálisan merev gráf, $|V| \geq d + 1$. Ekkor

$$|E| \leq (d + 1)|V| - \binom{d + 2}{2}.$$

Tétel

Legyen $G = (V, E)$ egy minimálisan globálisan merev gráf.
Tegyük fel, hogy $U \subseteq V$, $|U| \geq d + 1$ és $G[U]$ merev.
Ekkor

$$|E(U)| \leq (d + 1)|U| - \binom{d + 2}{2}.$$

Sejtés

A $G[U]$ merevségére vonatkozó feltétel elhagyható.

Hivatkozások

Connelly, R., Whiteley, W.J.: Global Rigidity: The Effect of Coning. *Discrete Comput Geom* **43**, 717–735 (2010)

Garamvölgyi, D., Jordán, T.: Minimally globally rigid graphs. *European Journal of Combinatorics* **108** (2023)

Jackson, B., Jordán T., Szabadka Z.: Globally Linked Pairs of Vertices in Equivalent Realizations of Graphs. *Discrete & Computational Geometry* **35**, 493-512 (2006)

Whiteley, W.: Cones, infinity and one-story buildings. *Struct. Topol.* **8**, 53–70 (1983)