Elliptikus feladatok numerikus megoldása bilineáris végeselemekkel

Andó-Kinorányi Dóra

Témavezető: Karátson János

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az önálló projekt 3 tárgy során elliptikus modellfeladatok bilineáris végeselemes kódolásával foglalkoztam. A számolások elvégzésére és az ábrák elkészítésére a Matlabot [2] használtam.

A projektmunka során két feladatot vizsgálunk: először egy Poisson-egyenletet, majd ennek módosításával szakadásos együtthatós PDE-t. Mindkét feladatot megoldjuk numerikusan, majd összevetjük az általunk ismert pontos megoldással. A feladatok numerikus megoldásához a végeselem-módszert használjuk. A vizsgált tartományokat mindkét esetben egyenlő, h oldalhosszúságú négyzetekre bontjuk, majd ezek felett a megoldást ún. bilineáris függvényekkel közelítjük. Bilineáris függvényeknek nevezzük az

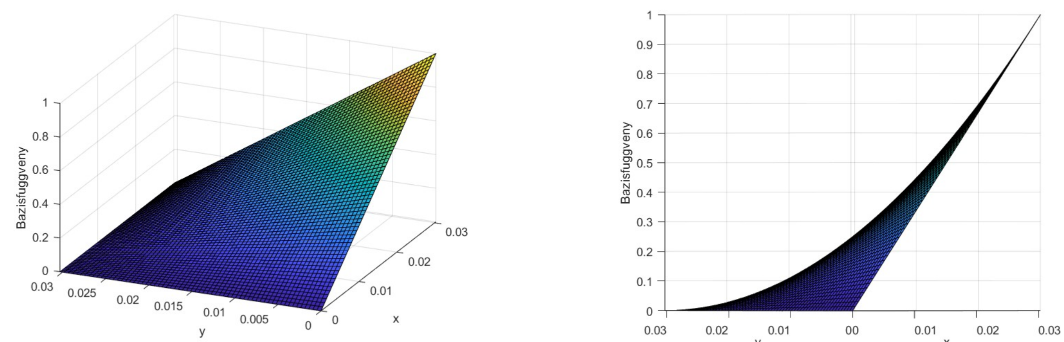
$$x, y \mapsto a + bx + cy + dxy$$

alakú függvényeket. [1]

Egy h oldalhosszúságú négyzeten a

$$\varphi_i(x, y) = \frac{xy}{h^2}$$

bázisfüggvényt, és annak néhány transzformáltját használjuk. Az 1. ábrán a végeselem módszerhez használt bilineáris végeselemekhez használt egyik bázisfüggvényt ábrázoljuk különböző irányokból.



1. ábra. A használt bázisfüggvény egy h oldalhosszúságú négyzet felett

A kapott rács pontjait lexikografikusan egy darab N^2 hosszú vektorba rendezzük úgy, hogy először az x-tengely, majd az y-tengely mentén növeljük az indexeket. Ezzel a rendezéssel a rácspontokbeli közelített értékeket egy $u_h \in \mathbb{R}^2$ vektorban tudjuk eltárolni, vagyis u_h-vel jelöljük a numerikus megodást. A Galjorkin-módszert alkalmazva a folytonos feladatunkat diszkrét, $A_h u_h = b_h$ alakú feladattá alakítjuk, amit aztán Gauss-eliminációval oldunk meg. A lineáris algebrai egyenletrendszerben az együtthtómátrix elemeinek képlete

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j,$$

a jobboldal képlete

$$b_i = \int_{\Omega_i} f\varphi_i.$$

A bázisfüggvényeket φ_i-vel jelöjük, ezek tartóinak középpontjait q_i-vel. N jelöli a belső osztópontok számát, h az ekvidisztáns rácstávolságot.

2. I. feladat

Az első általunk vizsgált feladat az alábbi :

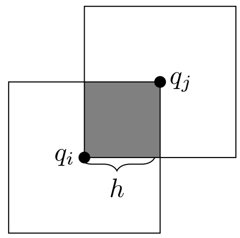
$$\begin{cases} -\Delta u = f, \quad \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ u\big|_{\Gamma} = 0, \\ f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{cases}$$

Ennek ismerjük a pontos megoldását, ami $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Ennek megfelelően tudjuk később számolni a numerikus megoldás pontos megoldástól való nagyságrendbeli eltérését. A numerikus megoldás kiszámolásához visszavezetjük egy diszkrét feladatra a problémánkat. A következő alfejezetben ehhez számoljuk ki az együtthatómátrixot.

2.1. Az együtthatómátrix

Az A_h együtthatómátrix elemeinek képlete: $\boldsymbol{a_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j}$. Az egyes elemek értéke a bázisok egymáshoz való pozíciójától függ, ez alapján különböztetjük meg az eseteket. Az egyes esetekben az alábbihoz hasonló számolást kell elvégezni az együtthatómátrix elemeinek kiszámolásához.

2.1.1. Példa együttható kiszámítására, ha átlósan helyezkednek el a bázisfüggvények



$$\varphi_i(x, y) = \frac{xy}{h^2}; \qquad \nabla\varphi_i = \left(\frac{y}{h^2}, \frac{x}{h^2}\right)$$

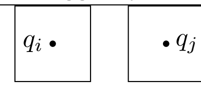
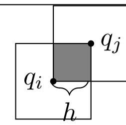
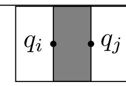
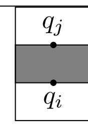
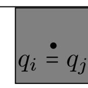
$$\varphi_j = \frac{(h-x)(h-y)}{h^2}; \qquad \nabla\varphi_j = \left(\frac{y-h}{h^2}, \frac{x-h}{h^2}\right)$$

$$\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = \frac{y(y-h)}{h^4} + \frac{x(x-h)}{h^4}$$

$$\int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = \frac{1}{h^4}\int_{[0,h]}\int_{[0,h]} y^2 - yh + x^2 - xh \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{h^4}\int_{[0,h]}\left[xy^2 - xyh + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2 h}{2}\right]_{x=0}^{h} \mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{h^4}\int_{[0,h]} hy^2 - yh^2 + \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{h^4}\left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^2h^2}{2} + \frac{h^3 y}{3} - \frac{h^3 y}{2}\right]_{y=0}^{h} = -\frac{1}{3}$$

2.1.2. Az együtthatómátrix értékei

A számolások részletei nélkül tartalmazza az alábbi táblázat a szükséges integrálok értékeit.

Bázisfüggvények pozíciója	Bázisfüggvények ábrán	$\int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$ értéke
a bázisfüggvények tartóinak nincs metszete		0
átlósan helyezkednek el a bázisfüggvények		$-\frac{1}{3}$
egymás mellett helyezkednek el a bázisfüggvények		$-\frac{1}{3}$
egymás felett helyezkednek el a bázisfüggvények		$-\frac{1}{3}$
ugyanott vannak a bázisfüggvények		$\frac{8}{3}$

2.1.3. A teljes együtthatómátrix

A különböző esetekből kapott értékek összeillesztésével kapjuk meg a teljes együtthatómátrixot.

A főátlóban lévő blokkmátrix:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

A 2. átlóban lévő blokkmátrix:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

A teljes együtthatómátrix:

$$\begin{bmatrix} E & F & 0 & 0 & 0 \\ F & E & F & 0 & 0 \\ 0 & F & E & F & 0 \\ 0 & 0 & F & E & F \\ 0 & 0 & 0 & F & E \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2\times N^2}$$

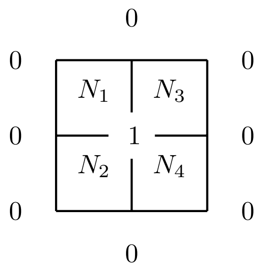
2.2. Jobboldal

Az egyenletrendszer jobboldalának képlete $b_i = \int_{\Omega_i} f\varphi_i$. A számolások során alkalmaztuk a

$$\int_{\Omega_i} f\varphi_i \approx f(q_i)\int_{\Omega_i}\varphi_i \tag{1}$$

közelítést.

A $\int_{\Omega_i}\varphi_i$ kiszámolásához a bázisfüggvény tartóját 4 egyenlő négyzetre bontjuk. Forgásszimmetria miatt elég csak az egyik négyzeten kiszámolni az integrált.



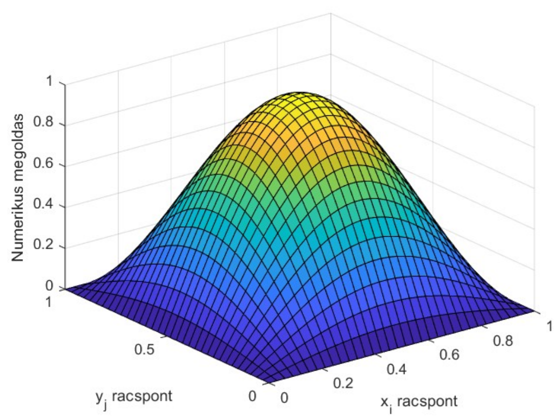
Az N_1 négyzeten $\varphi_i = \frac{x(h-y)}{h^2}$, és

$$\int_{N_1} \varphi_i = \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \frac{x(h-y)}{h^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{[0,h]} \frac{h-y}{h^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{h} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_{[0,h]} h - y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \left[hy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{h} = \frac{h^2}{4},$$

tehát $\int_{\Omega_i} \varphi_i = \sum_{i=1}^{4} \int_{N_i} \varphi_i = h^2$.

2.3. A numerikus megoldás

Az alábbi ábrán a megoldás numerikus közelítése látható.



2. ábra. A numerikus megoldás, $N = 32$ mellett.

2.4. Hiba

Az alábbi táblázat a numerikus megoldás pontos megoldástól való nagyságrendbeli eltérését tartalmazza a H_0^1-normában. A kapott értékek két hibaforrásból adódnak, az egyik a végeselem-módszer hibája, a másik pedig az 1-es egyenletbeli közelítésből adódó hiba. Látható, hogy N növelésével az összesített hiba nagysága 0-ba tart, tehát valóban közelítjük a megoldást.

N	Hiba nagysága
4	0,5124
8	0,1527
16	0,0423
32	0,0112
64	0,0029
128	$7,3175 \cdot 10^{-4}$
256	$1,8435 \cdot 10^{-4}$
512	$4,6268 \cdot 10^{-5}$

3. II. feladat

Ebben a fejezetben egy olyan feladat vizsgálata volt a cél, melynél a megoldás gradiense nem folytonos, de a jobboldal folytonos. Ennek megfelelően írtuk fel az alábbi feladatot szakadásos együtthatók használatával. A pontos megoldás legyen

$$u(x,y) = z(x)(y-y^2), \text{ ahol}$$
$$z(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \le \frac{1}{2} \\ 8x^3(1-x), & \text{ha } x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

A PDE:
$\boldsymbol{-\partial_x(p\partial_x u) - \partial_y^2 u = f,}$ ahol $\boldsymbol{p(x) = p_1 = 2,}$ ha $\boldsymbol{x \le \frac{1}{2},}$ és $\boldsymbol{p(x) = p_2 = 1,}$ ha $\boldsymbol{x \ge \frac{1}{2}.}$ A megoldás nincs C^1-ben, azonban a végeselem-módszer megfelelő a gyenge megoldás közelítésére.

3.1. Az f(x,y) jobboldal

A feladat jobboldalát az alábbiakban számoljuk ki.

Ha $x \le \frac{1}{2}$, akkor $u(x,y) = x(y-y^2)$. Ekkor $\nabla u = (y(1-y), x(1-2y))$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \nabla u = (2y(1-y), x(1-2y)),$$
$$-\partial_x(p\partial_x u) - \partial_y^2 u = 2x.$$

Ha $x \ge \frac{1}{2}$, akkor $u(x,y) = 8x^3(1-x)(y-y^2)$. Ekkor $\nabla u = (8(3x^2-4x^3)(y-y^2), 8(x^3-x^4)(1-2y))$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \nabla u = (8(3x^2-4x^3)(y-y^2), 8(x^3-x^4)(1-2y)),$$
$$-\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = -48x(1-2x)(y-y^2) + 16x^3(1-x).$$

Tehát

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \le \frac{1}{2} \\ -48x(1-2x)(y-y^2) + 16x^3(1-x), & \text{ha } x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

3.2. Az együtthatómátrix

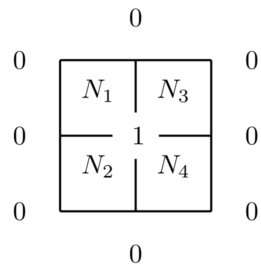
Az együtthatómátrix elemeinek képlete:

$$a(u,v) = \int p\partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v \Longrightarrow a_{ij} = \int_\Omega p\partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j + \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j.$$

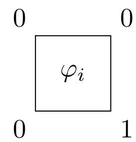
Ebben az alfejezetben az együtthatómátrixban szereplő elemek tagjait számoljuk ki. Az ábrákon a bázisfüggvények egymáshoz való elhelyezkedését, illetve a bázisfüggvények rácspontokban felvett értékeit ábrázoljuk. Az egyes négyzetekben a rácspontokban felvett értékekre illesztünk bilineáris függvényeket, így kapjuk meg a bázisfüggvények képletét. q_i, q_j jelöli a φ_i, φ_j bázisfüggvények középpontjait rendre. Szürkével emeljük ki a bázisfüggények tartóinak metszetét. A bázisfüggvények egymáshoz való elhelyezkedése alapján különböztetünk meg eseteket. Az alábbi alfejezetben bemutatjuk az egyik esetben a számolás részleteit, a többi esetében is hasonló számolások szükségesek.

3.2.1. Példa eset: egymásra illeszkedő bázisfüggvények

Ebben az esetben $q_i = q_j$, és $\varphi_i = \varphi_j$.



Forgásszimmetria miatt elég az egyik kis négyzeten (legyen ez N_1) kiszámolni az $\int_{N_1} \partial_x\varphi_i\partial_x\varphi_j$ és az $\int_{N_1} \partial_y\varphi_i\partial_y\varphi_j$ értékeket.



$$\varphi_j(x,y) = \frac{x(h-y)}{h^2}; \qquad \partial_x\varphi_j = \frac{y-h}{h^2}; \qquad \partial_y\varphi_j = \frac{-x}{h^2}$$

$$\int_{N_1} \partial_x\varphi_i\partial_x\varphi_j = \int_0^h \int_0^h \frac{(h-y)^2}{h^4}\,dx\,dy = \frac{1}{h^4}\int_0^h \left[x(h^2-2hy+y^2)\right]_{x=0}^h dy = \frac{1}{h^4}\int_0^h h^3 - 2h^2y + hy^2\,dy = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{h^4}\left[h^3y - \frac{2h^2y^2}{2} + -\frac{hy^3}{3}\right]_{y=0}^h = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{N_1} \partial_y\varphi_i\partial_y\varphi_j = \int_0^h \int_0^h \frac{x^2}{h^4}\,dx\,dy = \frac{1}{h^4}\int_0^h \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^h dy = \frac{1}{h^4}\int_0^h \frac{h^3}{3}\,dy == \frac{1}{h^4}\left[\frac{x^3y}{3}\right]_{y=0}^h = \frac{1}{3}. \tag{3}$$

Tehát azt kapjuk, hogy

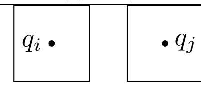
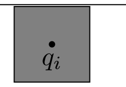
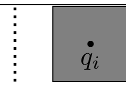
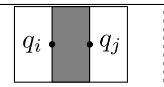
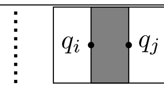
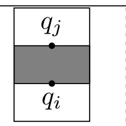
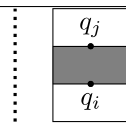
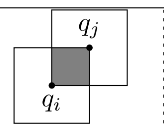
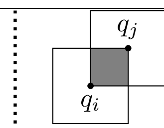
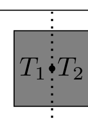
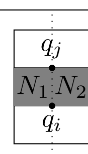
$$\int_\Omega \partial_x\varphi_i\partial_x\varphi_j = \sum_{i=1}^4 \int_{N_i} \partial_x\varphi_i\partial_x\varphi_j = \frac{4}{3},$$

$$\int_\Omega \partial_y\varphi_i\partial_y\varphi_j = \sum_{i=1}^4 \int_{N_i} \partial_y\varphi_i\partial_y\varphi_j = \frac{4}{3}.$$

3.2.2. Az együtthatómátrix értékei

$$\int_\Omega p\partial_x\varphi_i\partial_x\varphi_j + \partial_y\varphi_i\partial_y\varphi_j = p\int_\Omega \partial_x\varphi_i\partial_x\varphi_j + \partial_y\varphi_i\partial_y\varphi_j,$$

mivel p konstans értékű. A számolások részletei nélkül tartalmazza az alábbi táblázat a szükséges integrálok értékeit.

Bázisfüggvények pozíciója	Bázisfüggvények ábrán	$p\int_\Omega \partial_x\varphi_i\partial_x\varphi_j + \partial_y\varphi_i\partial_y\varphi_j$ értéke
a bázisfüggvények tartóinak nincs metszete		0
egymásra illeszkedő bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		4
egymásra illeszkedő bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{8}{3}$
egymás melletti bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		-1
egymás melletti bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{-1}{3}$
egymás feletti bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		0
egymás feletti bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{-1}{3}$
átlós bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{-1}{2}$
átlós bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{-1}{3}$
egymásra illeszkedő bázisfüggvények, áthalad rajtuk a felezővonal		$\frac{10}{3}$
egymás feletti bázisfüggvények, áthalad rajtuk a felezővonal		$\frac{-1}{6}$

3.2.3. A teljes együtthatómátrix

A különböző esetekből kapott értékek összeillesztésével kapjuk meg a teljes együtthatómátrixot.

A főátlóban lévő blokkmátrix:

$$E_p = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{10}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

A 2. átlóban lévő blokkmátrix:

$$F_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

A teljes együtthatómátrix:

$$\begin{bmatrix} E_p & F_p & 0 & 0 & 0 \\ F_p & E_p & F_p & 0 & 0 \\ 0 & F_p & E_p & F_p & 0 \\ 0 & 0 & F_p & E_p & F_p \\ 0 & 0 & 0 & F_p & E_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$$

3.3. Jobboldal

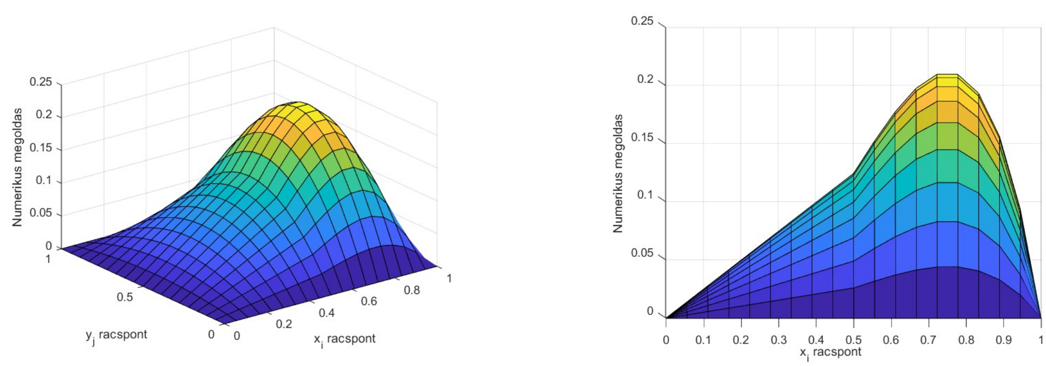
Az egyenletrendszer jobboldalának kiszámolásához felhasználjuk a 2.2. alfejezet és a 3.1. alfejezet eredményeit, továbbá alkalmaztuk a

$$\int_{\Omega_i} f\varphi_i \approx f(q_i) \int_{\Omega_i} \varphi_i$$

közelítést.

3.4. Numerikus megoldás

A lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a feladat numerikus megoldását. A numerikus megoldás $N = 17$ esetén:

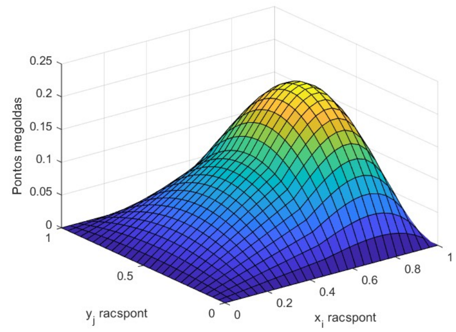


(a) Felülnézet

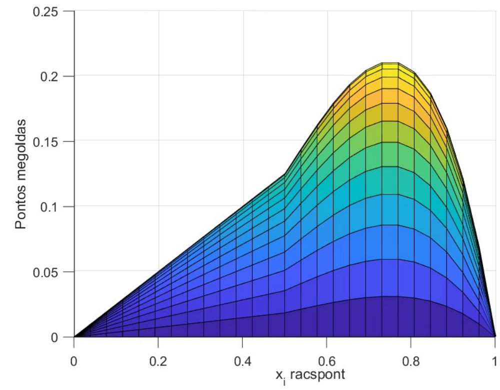
(b) Oldalnézet

3. ábra. A numerikus megoldás különböző nézetekben

A pontos megoldás $N = 17$ esetén:



(a) Felülnézet



(b) Oldalnézet

4. ábra. A pontos megoldás különböző nézetekben

A 3b. és a 4b. ábrán jól látható, hogy a megoldás folytonos, és $x = 0.5$-ben törik.

Hivatkozások

[1] Horváth Róbert Karátson János. *Numerical Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. URL: `https://kajkaat.web.elte.hu/pdnmell-ang-2022.pdf`.

[2] MathWorks. *Matlab Documentation*. URL: `https://www.mathworks.com/help/matlab/`.