Elliptikus feladatok numerikus megoldása bilineáris végeselemekkel

Témavezető: Karátson János

Andó-Kinorányi Dóra

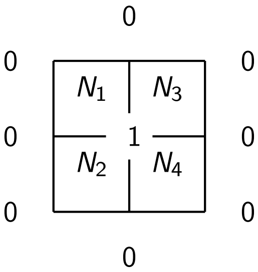
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Önálló Projektmunka III.

2023.06.01.

Bevezetés

- Elliptikus feladatok megoldása numerikus módszerekkel;
- Végeselem-módszerrel dolgozunk;
- Implementáció MATLAB-ban;
- A vizsgált tartományokat mindkét esetben egyenlő, h oldalhosszúságú négyzetekre bontjuk;
- Bilineáris függvények: $x, y \mapsto a + bx + cy + dxy$
- Adott folytonos elliptikus feladat;
- Galjorkin-módszer $\longrightarrow A_h u_h = b_h$ alakú feladat;

Bázisfüggvények I.



- $\varphi_i(x, y) = \frac{xy}{h^2}$ és transzformáltjai:
- $\frac{(h-x)(h-y)}{h^2}$; $\frac{x(h-y)}{h^2}$; $\frac{(h-x)y}{h^2}$

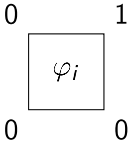


Figure 1: A φ_i bázisfüggvény által felvett értékek.

Bázisfüggvények II.

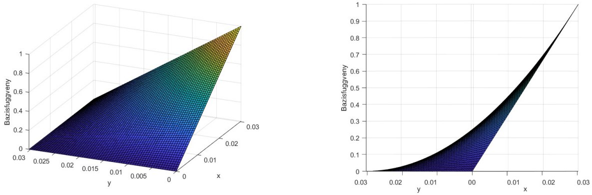


Figure 2: Az egyik használt bázisfüggvény egy *h* oldalhosszúságú négyzet felett.

I. feladat

Az első általunk vizsgált feladat az alábbi :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \quad \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ u\big|_{\Gamma} = 0, \\ f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{cases}$$

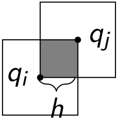
A pontos megoldás: $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

A LAER felírása

- Az együtthatómátrix elemeinek képlete:$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$;
- a jobboldal eleimeinek képlete: $b_i = \int_{\Omega_i} f\varphi_i$;

Példa együttható kiszámítására I.

Példa együttható kiszámítására, ha átlósan helyezkednek el a bázisfüggvények:



$$\varphi_i(x,y) = \frac{xy}{h^2}; \nabla\varphi_i = \left(\frac{y}{h^2}, \frac{x}{h^2}\right)$$

$$\varphi_j = \frac{(h-x)(h-y)}{h^2}; \nabla\varphi_j = \left(\frac{y-h}{h^2}, \frac{x-h}{h^2}\right)$$

$$\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = \frac{y(y-h)}{h^4} + \frac{x(x-h)}{h^4}$$

Példa együttható kiszámítására II.

$$\int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = \frac{1}{h^4}\int_{[0,h]}\int_{[0,h]} y^2 - yh + x^2 - xh \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

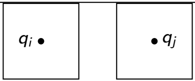
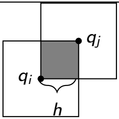
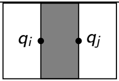
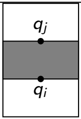
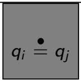
$$= \frac{1}{h^4}\int_{[0,h]} \left[xy^2 - xyh + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2 h}{2}\right]_{x=0}^{h} \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{h^4}\int_{[0,h]} hy^2 - yh^2 + \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{h^4}\left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^2 h^2}{2} + \frac{h^3 y}{3} - \frac{h^3 y}{2}\right]_{y=0}^{h} = -\frac{1}{3}$$

Az együtthatómátrix értékei

A számolások részletei nélkül tartalmazza az alábbi táblázat a szükséges integrálok értékeit.

Bázisfüggvények pozíciója	Bázisfüggvények ábrán	$\int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$ értéke
a bázisfüggvények tartóinak nincs metszete		0
átlósan helyezkednek el a bázisfüggvények		$-\frac{1}{3}$
egymás mellett helyezkednek el a bázisfüggvények		$-\frac{1}{3}$
egymás felett helyezkednek el a bázisfüggvények		$-\frac{1}{3}$
ugyanott vannak a bázisfüggvények		$\frac{8}{3}$

Az együtthatómátrix

A főátlóban lévő blokkmátrix:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

A 2. átlóban lévő blokkmátrix:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

A teljes együtthatómátrix:

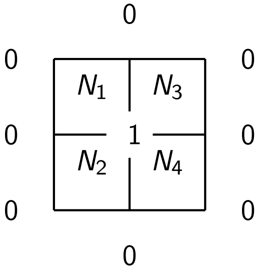
$$\begin{bmatrix} E & F & 0 & 0 & 0 \\ F & E & F & 0 & 0 \\ 0 & F & E & F & 0 \\ 0 & 0 & F & E & F \\ 0 & 0 & 0 & F & E \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$$

A jobboldal I.

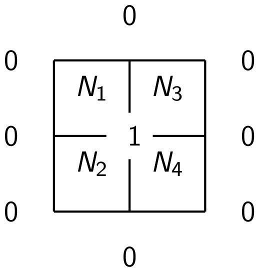
Az egyenletrendszer jobboldalának képlete $b_i = \int_{\Omega_i} f\varphi_i$. A számolások során alkalmaztuk a

$$\int_{\Omega_i} f\varphi_i \approx f(q_i)\int_{\Omega_i} \varphi_i \tag{1}$$

közelítést.
A $\int_{\Omega_i} \varphi_i$ kiszámolásához a bázisfüggvény tartóját 4 egyenlő négyzetre bontjuk. Forgásszimmetria miatt elég csak az egyik négyzeten kiszámolni az integrált.



A jobboldal II.



Az N_1 négyzeten $\varphi_i = \frac{x(h-y)}{h^2}$, és

$$\int_{N_1} \varphi_i = \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \frac{x(h-y)}{h^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{[0,h]} \frac{h-y}{h^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{h} \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{2} \int_{[0,h]} h - y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \left[hy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{h} = \frac{h^2}{4},$$

tehát $\int_{\Omega_i} \varphi_i = \sum_{i=1}^{4} \int_{N_i} \varphi_i = h^2$.

A numerikus megoldás

Az alábbi ábrán a megoldás numerikus közelítése látható.

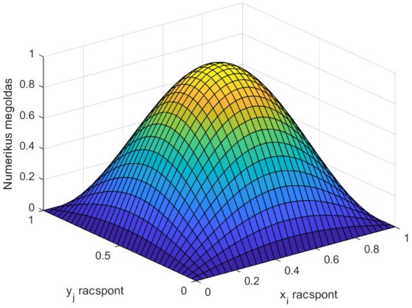


Figure 3: A numerikus megoldás, $N = 32$ mellett.

A közelítés hibája

Két hibaforrás:

- A végeselem-módszer alkalmazásából eredő hiba;
- $\int_{\Omega_i} f\varphi_i \approx f(q_i)\int_{\Omega_i}\varphi_i$

A közelítés hibája különböző osztópontszámok esetén:

N	Hiba nagysága
4	0,5124
8	0,1527
16	0,0423
32	0,0112
64	0,0029
128	$7,3175 \cdot 10^{-4}$
256	$1,8435 \cdot 10^{-4}$
512	$4,6268 \cdot 10^{-5}$

II. feladat

- Cél: olyan feladat felírása és megoldása, melynél a megoldás gradiense nem folytonos, de a jobboldal folytonos;
- Szakadásos együtthatókat használtunk;

A pontos megoldás legyen:

$$u(x,y) = z(x)(y - y^2), \text{ ahol}$$
$$z(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \\ 8x^3(1-x), & \text{ha } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- A PDE:
  $\boldsymbol{-\partial_x(p\partial_x u) - \partial_y^2 u = f},$ ahol
  $\boldsymbol{p(x) = p_1 = 2},$ ha $\boldsymbol{x \leq \frac{1}{2}},$ és $\boldsymbol{p(x) = p_2 = 1},$ ha $\boldsymbol{x \geq \frac{1}{2}}$.
- A megoldás nincs C^1-ben, azonban a végeselem-módszer megfelelő a gyenge megoldás közelítésére.

Az f(x,y) jobboldal

A feladat jobboldalát az alábbiakban számoljuk ki.
Ha $x \leq \frac{1}{2}$, akkor $u(x,y) = x(y - y^2)$. Ekkor $\nabla u = (y(1-y), x(1-2y))$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \nabla u = (2y(1-y), x(1-2y)),$$
$$-\partial_x(p\partial_x u) - \partial_y^2 u = 2x.$$

Ha $x \geq \frac{1}{2}$, akkor $u(x,y) = 8x^3(1-x)(y-y^2)$. Ekkor
$\nabla u = (8(3x^2 - 4x^3)(y-y^2), 8(x^3 - x^4)(1-2y))$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \nabla u = (8(3x^2 - 4x^3)(y-y^2), 8(x^3 - x^4)(1-2y)),$$
$$-\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = -48x(1-2x)(y-y^2) + 16x^3(1-x).$$

Tehát

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \\ -48x(1-2x)(y-y^2) + 16x^3(1-x), & \text{ha } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

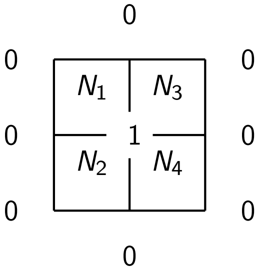
Az együtthatómátrix

Az együtthatómátrix elemeinek képlete:

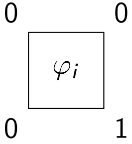
$$a(u, v) = \int p\partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v \Longrightarrow a_{ij} = \int_\Omega p\partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j + \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j .$$

Példa együttható számolására I.

Példa számolásra, ha egymásra illeszkednek a bázisfüggvények. Ebben az esetben $q_i = q_j$, és $\varphi_i = \varphi_j$.



Forgásszimmetria miatt elég az egyik kis négyzeten (legyen ez N_1) kiszámolni az $\int_{N_1} \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j$ és az $\int_{N_1} \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j$ értékeket.



Példa együttható számolásra II.

$$\varphi_j(x,y) = \frac{x(h-y)}{h^2}; \partial_x \varphi_j = \frac{y-h}{h^2}; \partial_y \varphi_j = \frac{-x}{h^2}$$

$$\int_{N_1} \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j = \int_0^h \int_0^h \frac{(h-y)^2}{h^4}\, dx\, dy = \frac{1}{h^4} \int_0^h \left[x(h^2 - 2hy + y^2) \right]_{x=0}^h dy = \frac{1}{h^4} \int_0^h h^3 - 2h^2 y + hy^2\, dy =$$

$$= \frac{1}{h^4} \left[h^3 y - \frac{2h^2 y^2}{2} + - \frac{hy^3}{3} \right]_{y=0}^h = \frac{1}{3}.$$

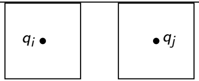
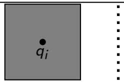
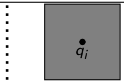
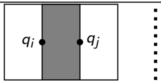
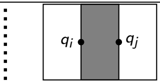
$$\int_{N_1} \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j = \int_0^h \int_0^h \frac{x^2}{h^4}\, dx\, dy = \frac{1}{h^4} \int_0^h \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^h dy = \frac{1}{h^4} \int_0^h \frac{h^3}{3}\, dy == \frac{1}{h^4} \left[\frac{x^3 y}{3} \right]_{y=0}^h = \frac{1}{3}.$$

Tehát azt kapjuk, hogy

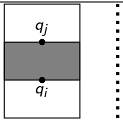
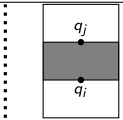
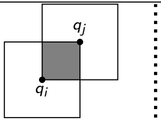
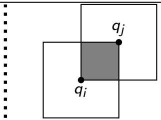
$$\int_\Omega \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j = \sum_{i=1}^4 \int_{N_i} \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j = \frac{4}{3},$$

$$\int_\Omega \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j = \sum_{i=1}^4 \int_{N_i} \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j = \frac{4}{3}.$$

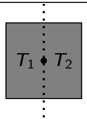
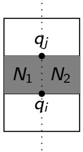
Az együtthatómátrix értékei

Bázisfüggvények pozíciója	Bázisfüggvények ábrán	$p \int_\Omega \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j + \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j$ értéke
a bázisfüggvények tartóinak nincs metszete		0
egymásra illeszkedő bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		4
egymásra illeszkedő bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{8}{3}$
egymás melletti bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		-1
egymás melletti bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{-1}{3}$

Az együtthatómátrix értékei

Bázisfüggvények pozíciója	Bázisfüggvények ábrán	$p \int_\Omega \partial_x\varphi_i\partial_x\varphi_j + \partial_y\varphi_i\partial_y\varphi_j$ értéke
egymás feletti bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		0
egymás feletti bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{-1}{3}$
átlós bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{-1}{2}$
átlós bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{-1}{3}$

Az együtthatómátrix értékei

Bázisfüggvények pozíciója	Bázisfüggvények ábrán	$p \int_\Omega \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j + \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j$ értéke
egymásra illeszkedő bázisfüggvények, áthalad rajtuk a felezővonal		$\frac{10}{3}$
egymás feletti bázisfüggvények, áthalad rajtuk a felezővonal		$\frac{-1}{6}$

A teljes együtthatómátrix

A főátlóban lévő blokkmátrix:

$$E_p = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{10}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

A 2. átlóban lévő blokkmátrix:

$$F_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

A teljes együtthatómátrix:

$$\begin{bmatrix} E_p & F_p & 0 & 0 & 0 \\ F_p & E_p & F_p & 0 & 0 \\ 0 & F_p & E_p & F_p & 0 \\ 0 & 0 & F_p & E_p & F_p \\ 0 & 0 & 0 & F_p & E_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$$

A numerikus megoldás

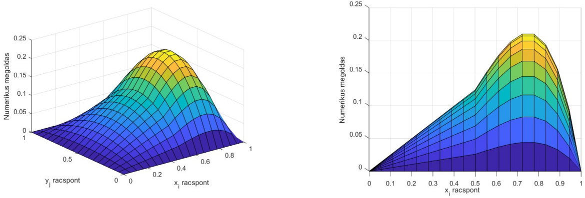


Figure 4: A numerikus megoldás $N = 17$ esetén.

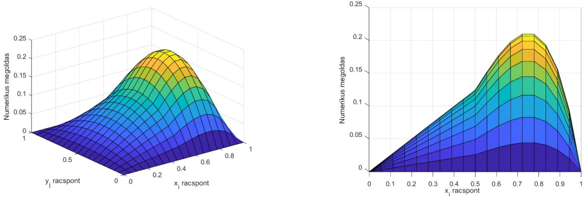


Figure 5: A pontos megoldás $N = 17$ esetén.