Piacok árazása matroidokkal adott kiértékelési függvények esetén

Szögi Evelin

2020. december 7.

Adott egy $G = (S, T, E)$ teljes páros gráf, melyben $|S| = |T|$. Az S pontosztály felel meg a vásárlók halmazának, a T pontosztály pedig a megvásárolható tárgyak halmaza. A $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvény azt mutatja, hogy egy vásárló mennyire értékel egy terméket: $c(u, v)$ azt jelenti, hogy az u vásárló mennyire értékeli a v tárgyat. Egy adott G-beli párosítás esetén a **közjólét** (**social welfare - SW**) a párosítás súlyát jelenti. Az **optimális közjólét** egy maximális súlyú teljes párosítás súlya.

Egy $p : T \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvényt árazásnak nevezünk. Az árazás **statikus**, ha az első vásárló érkezése előtt beállítjuk az árakat és azokon a továbbiakban nem változtatunk. **Dinamikus** árazásról beszélünk, ha minden pillanatban, amikor egy vásárló elhagyta a piacot, de a következő még nem érkezett meg, megváltoztathatjuk a még meg nem vásárolt tárgyak árait. Egy adott p árazás esetén az u vásárló **hasznossága** a v tárgyból $c(u, v) - p(v)$. Egy vásárló azt a tárgyat vásárolja meg, amely maximalizálja a hasznosságot. Ha ez a maximum több helyen is felvétetik, akkor szabadon választhat. Ha ez a maximum 0, akkor dönthet úgy, hogy nem vásárol semmit. (Ha a maximum negatív, akkor nem vásárol semmit.)

A cél olyan árazás megtalálása, amely esetén a vásárlás maximális súlyú teljes párosítás élei mentén történik a vásárlók tetszőleges érkezési sorrendje mellett, azaz elérjük az optimális SW-t a vásárlók minden sorrendje esetén. Egy egyszerű példával megmutatható, hogy némely esetben nem létezik olyan statikus árazás, mely ezt biztosítaná. Viszont ilyen dinamikus árazás van. Ezt a [1] cikkben bizonyították. A féléves munka egyik eredménye, hogy sikerült adni az ott leírt bizonyítástól különböző és egyszerűbb bizonyítás is: jelölje K a maximális súlyú párosítás súlyát G-ben. Egerváry tételéből tudjuk, hogy létezik olyan $\pi : S \cup T \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ lefogó súlyozás ($\pi(u)+\pi(v) \geq c(uv)$ minden uv élre), melyre $\sum \pi(v) = K$. Mivel teljes gráfról van szó és $c \geq 0$, így π választható nemnegatívnak is. Egy ilyen π esetén minden olyan uv élre, mely benne van egy maximális súlyú párosításban, $c(uv) = \pi(v)+\pi(u)$ teljesül. Azt is tudjuk, hogy ha egy uv él nem szerepel maximális súlyú teljes párosításban, akkor $c(uv)$-t meg tudjuk növelni egy olyan kis pozitív számmal, mely esetén nem kerül be maximális súlyú teljes párosításba, vagyis a maximális súlyú teljes párosítások súlya K marad. Ha ezt a kis növelést minden olyan élre elvégezzük, amely nem szerepel maximális súlyú teljes párosításban, akkor $\pi(v) = c(uv) - \pi(u)$ minden olyan u tárgyra, melyre az uv szerepel maximális súlyú teljes párosításban és minden más esetben $\pi(v) > c(u^{'}v) - \pi(u^{'})$. Így ha egy u tárgy ára $\pi(u)$, bármelyik vásárló érkezik is először, a választása olyan él mentén fog történni, mely kiegészíthető maximális súlyú teljes párosítássá.

A $b : S \to \mathbb{N}$ függvényt **igényfüggvénynek** nevezzük: a v vásárló $b(v)$ darab tárgyat szeretne vásárolni. A már leírt esetben b az azonosan 1 függvény volt. Az előzőhöz hasonlóan a vásárló azt a $b(v)$ terméket fogja választani, amelyek esetén legnagyobb a hasznossága. Nem ismert, hogy tetszőleges számú vásárló és tetszőleges igényfüggvény esetén létezik-e dinamikus árazás, mely garantálja az optimális SW-t. (Ismert, hogy van jó dinamikus árazás, ha minden vásárló igénye 1, vagy ha legfeljebb 3 vásárló van tetszőleges igényekkel.) Sikerült azonban belátni, hogy ha minden v vásárlóra $b(v) = 1$ vagy $b(v) = 2$, akkor létezik jó dinamikus árazás. A megfelelő p megtalálásához elkészítjük azt a páros gráfot, melyben minden v vásárlónak $b(v)$ példánya szerepel, és az előzőekben leírtak szerint keresünk egy kezdőárazást. Azonban ebben az esetben lehetnek olyan élpárok, melyek ugyanarra a vásárlóra illeszkednek és mindegyik benne van optimális megoldásban, de egyszerre nem szerepelhetnek optimálisban. Viszont ekkor tudjuk az árakat egy kis pozitív számmal módosítani úgy, hogy az optimális megoldások halmaza ne bővüljön, viszont egy vásárló se válasszon két olyan él mentén, melyek nem szerepelhetnek egyszerre optimális megoldásban. A feladat ilyenkor az, hogy megadjuk a tárgyak egy sorrendjét, amely mutatja, hogy hogyan kell a kis ármódosításokat végrehajtani (így a vásárlók is e szerint a sorrend szerint választanak tárgyakat a lehetséges optimális tárgyaik közül).

A [2] cikkből tudjuk, hogy három vásárló és tetszőleges igényfüggvények esetén létezik olyan dinamikus árazás, mellyel tetszőleges érkezési sorrend esetén elérjük az optimális SW-t. Erre a feladatra is sikerült egy új és egyszerű bizonyítást találni. Az előző esethez hasonlóan ez a probléma is leredukálható arra, hogy adjuk meg a tárgyak egy olyan sorrendjét, mely optimális megoldáshoz vezet, ha a vásárlók a sorrendet betartva választanak.

A továbbiakban a cél, hogy a fenti problémák bizonyításában használt technikák segítségével próbáljunk választ adni arra, hogy létezik-e jó dinamikus árazás tetszőleges számú vásárló és tetszőleges igényfüggvény mellett. Ezt az általánosabb feladat is leredukálható arra a feladatra, hogy adjuk meg a tárgyak egy jó sorrendjét. Ehhez a három vásárló esetében adott bizonyítás jó kiindulópont lehet, az ott használt ötletet kellene elsősorban kicsit általánosítani.

Hivatkozások

[1] Vincent Cohen-Addad, Alon Eden, Michal Feldman, and Amos Fiat. The invisible hand of dynamic market pricing, 2018.

[2] Ben Berger, Alon Eden, and Michal Feldman. On the power and limits of dynamic pricing in combinatorial markets, 2020.