Név: **Gálffy Veronika**
NEPTUN-kód: **OHUR40**
Témavezető: **Dr. Kovács Sándor**

**Önálló projekt 2**
**Járványterjedést modellező reakció-diffúzió-differenciálegyenletek kvalitatív tulajdonságai**

---

# 1. Egy járványterjedést modellező rekció-diffúzió-rendszer

Tegyük fel, hogy valamely fertőzőbetegség emberi populációban való terjedésének időbeli fejlődése az

$$(\dot{S}, \dot{E}, \dot{I}) = \mathbf{f}(S, E, I) \tag{1}$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszerrel modellezhető, ahol

$$\left.\begin{array}{rcl} f_1(S,E,I) & := & \lambda - \dfrac{\alpha S I}{S+I} + \beta I - \psi S - \delta_S S, \\ f_2(S,E,I) & := & \psi S + \kappa I - \delta_E E, \\ f_3(S,E,I) & := & \dfrac{\alpha S I}{S+I} - \kappa I - \beta I - \delta_I I. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Itt $S(t)$ és $I(t)$, ill. $E(t)$, jelenti a populációban a $t$ időpontban meglévő fogékony, fertőző, ill. azon egyedek számát, akiket oktattak vagy akik részt vettek valamely oltási programban. Az (1) rendszerben előforduló paraméterek:

- $\delta_k > 0$ jelöli az az adott osztályba tartozó egyedek halálozási rátáját $(k \in \{S, E, I\})$,
- $\lambda > 0$ jelöli a születési rátát vertikális transzmisszió nélkül, azaz minden újszülött egyed veszélyeztett, de még nem lehet fertőzött, illetve nincs is oktatva.
- $\alpha > 0$ az egy fertőzésre jutó érintkezések átlagos számával kapcsolatos ráta (a fogékony osztályból a fertőzöttbe átkerülés rátája),
- $\beta > 0$ annak a rátája, amellyel a betegségből felépült egyedek visszatérnek a fogékonyak osztályába,
- $\psi \geq 0$ a veszélyeztetettek oktatási rátája, ahol feltesszük, hogy $\kappa \leq \alpha$ teljesül (vö. [6])
- $\kappa$ pedig a fertőzöttek oktatási rátája, ahol feltesszük, hogy $\kappa \leq \alpha$ (vö. [6]).

Tegyük fel, hogy a betegség terjedésének modellezéséhez a populáció térbeli kiterjedését is figyelembe kell vennünk: a populáció egyedei a szakaszonként sima peremmel rendelkező $\Omega$ tartományon szabadon mozoghatnak, amelynek határán keresztül nincsen migráció, azaz a rendszerünket a

$$\partial_t \mathbf{u} = D\Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) \tag{3}$$

reakció-diffúzió-differenciálegyenlet írja le, homogén Neumann-féle peremfeltételekkel (a tartomány határán át nincs migráció):

$$(\mathbf{n}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\mathbf{0}\qquad((\mathbf{r},t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_0^+),\tag{4}$$

és a rendszerhez nem-negatív (nem azonosan zérus) kezdeti feltételt írunk elő:

$$\mathbf{u}(\cdot,t)=\mathbf{u}_0(\cdot)\qquad((\mathbf{r},t)\in\overline{\Omega}\times\{0\}),\tag{5}$$

ahol $D:=\mathrm{diag}\{d_S,d_E,d_I\}$ pozitív definit diffúziós mátrix, továbbá $\mathbf{u}:=(S,E,I)$, ill. $\mathbf{f}:=(f_1,f_2,f_3)$.
Az alábbiakban megmutatjuk, hogy háromdimenziós, szakaszonként sima peremel rendelkező térbeli tartomány, azaz $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ esetén miként motiválható valamely (3) típusú differenciálegyenlet (vö. [1]). Legyen $\mathbf{u}\in\mathfrak{C}^2$. Ha $\mathbf{j}$ jelöli a populációban az egyedek térbeli áramlási sebességét, akkor Fick első törvénye szerint

$$\mathbf{j}=-\nabla\mathbf{u}.\tag{6}$$

A negatív előjel – azaz hogy az egyedek áramlása sűrűséggradiensükkel ellentétes irányú – arra utal, hogy a diffúzió a sűrűség kiegyenlítésére irányul. A sűrűség definíciója szerint a tetszőlegesen rögzített $\Omega$ térrészben a populáció szereplőinek mennyisége

$$\int_\Omega u_k(\mathbf{r},t)\,d\mathbf{r}\qquad(k\in\{S,E,I\}).$$

A tömegmegmaradás törvénye következtében a populáció k-adik szereplője $\Omega$-beli mennyiségének időbeli változására a

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_k(\mathbf{r},t)\,d\mathbf{r}=\int_\Omega(f_k\circ u_k)(\mathbf{r},t)\,d\mathbf{r}-\int_{\partial\Omega}j_k(\mathbf{r},t)\,d\mathbf{F}\tag{7}$$

összefüggés teljesül, ahol az $f_i$ sima függvény jelöli a populáció szereplőinek forrássűrűségét: ha az $\Omega$ térrészen belül a populáció $k$ indexű szereplőjének lélekszáma növekedik, akkor pozitív előjelű (forrás), ha fogy, akkor negtív előjelű (nyelő). (6)-et (7)-be helyettesítve, valamint alkalmazva a Gauß-Osztrogradszkij-tételt (7) az

$$\int_\Omega(\partial_t u_k-f_k\circ u_k-D\Delta_{\mathbf{r}}u_k)=0\qquad(k\in\{S,E,I\})$$

alakba írható. Tekintve, hogy $\Omega$ tetszőlegesen rögzített, az integrandus folytonossága alapján a reakció diffúziós-differenciálegyenletek (3) differenciális alakját kapjuk.

# 2. Kvalitatív tulajdonságok

## 2.1. Pozitivitás

A [6] tanulmányban a szerzők megmutatták, hogy az (2) rendszer biológiailag jólformált, azaz a (2) egyenletnek van a $[0,+\infty)$ pozitív féltengelyen értelmezett $\mathbf{u}$ megoldása, és ha ha $\mathbf{u}(0):=(S(0),E(0),I(0))>\mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{u}(t)>\mathbf{0}\qquad(0\le t\in\mathbb{R})$$

teljesül, azaz a fázissík pozitív kvadránsa (pozitívan) invariáns halmaz. Az alábbiakban célunk megmutatni, hogy az utóbbi elmondható a (3) rendszerről is. Ehhez szükségünk lesz az alábbi segédállításra.

**2.1. Lemma (vö. [4]).** *Legyen* $d, m \in \mathbb{N}$*, ill.*

$$\Sigma := \bigcap_{k=1}^{m} \{\mathbf{r} \in U : \ G_k(\mathbf{r}) \leq 0\},$$

*ahol* $U \subset \mathbb{R}^d$ *nyílt halmaz és* $G_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *olyan* $\mathfrak{C}^1$ *függvények, amelyek* $\nabla G_i$ *gradiense sehol sem tűnik el* $(k \in \{1, \ldots, m\})$*. Ha tetszőleges* $\mathbf{r} \in \partial\Sigma$ *pontban minden* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *indexre*

**(i)** $\nabla G_i(\mathbf{r})$ *a* $D$ *diffúziómátrix bal oldali sajátvektora;*

**(ii)** *a* $G_i$ *függvény kvázi-konvex, azaz bármely* $\mathbf{r} \in U$*, ill* $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$ *esetén a* $\langle \nabla G_i(\mathbf{r}), \mathbf{s}\rangle = 0$ *egyenlőség következménye:* $\langle \mathbf{s}, \nabla^2 G_i(\mathbf{r})\mathbf{s})\rangle \geq 0$*;*

**(iii)** $\langle \nabla G_i(\mathbf{r}), \mathbf{f}(\mathbf{r})\rangle < 0$*,*

*akkor* $\Sigma$ *a* (3) *típusú rendszert illetően pozitívan invariáns halmaz.*

Ha (3) reakció-diffúzió-differenciálegyenlet esetében a kinetikai rendszer[1] $\mathbf{f}$ jobb oldala (1) alakú, akkor elmondható, hogy ha

$$\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^3$$

megoldása (3)-nek, úgy

- $\Phi_3 \equiv 0$ megoldása (3) harmadik egyenletének, így az egyértelműség köetkeztében tetszőleges $0 < t \in \mathbb{R}$ időpontban $\Phi_3(t) > 0$;
- a

  $$G_1(S, E, I) :\equiv -S, \qquad \text{ill.} \qquad G_2(S, E, I) :\equiv -E$$

  függvényekkel nyilvánvalóan teljesülnek a fenti lemma feltételei.

Igaz tehát a következő

**2.2. Tétel.** *Ha a* (3) *reakció-diffúzió-differenciálegyenlet kinetikai rendszerének jobb oldala* (1) *alakú, akkor* (3) *fázisterének pozitív oktánsa (pozitívan) invariáns halmaz.*

## 2.2. Stabilitás

A [6] tanulmányban a szerzők azt is megmutatták, hogy az (2) rendszernek két egyensúlyi helyzete lehetséges. Ha

$$\mathcal{R}_0 := \frac{a}{\kappa + \beta + \delta_I}$$

jelöli az elemi reprodukciós számot, akkor

- $\mathcal{R}_0 < 1$ esetén a (2) rendszernek egyetlen egyensúlyi helyzete van:

$$\mathfrak{E}_b := \left(\frac{\lambda}{\delta_S + \psi}, \frac{\lambda\psi}{\delta_E(\delta_S + \psi)}, 0\right),$$

[1]A (3) rendszer kinetikai rendszerének nevezzük a $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ közönséges differenciálegyenlet-rendszert (vö. [5]).

- $\mathcal{R}_0 > 1$ esetén a (2) rendszernek két egyensúlyi helyzete van: $\mathfrak{E}_b$ és $\mathfrak{E}_e := (S_e, E_e, I_e)$, ahol

$$\begin{aligned} S_e &:= \frac{\lambda(\beta+\delta_I+\kappa)}{a(\delta_I+\kappa)+(\beta+\delta_I+\kappa)(\psi+\delta_S-\delta_I-\kappa)}, \\ E_e &:= \frac{a\kappa\lambda+\lambda(\beta+\delta_I+\kappa)(\psi-\kappa)}{\delta_E\{a(\delta_I+\kappa)+(\beta+\delta_I+\kappa)(\delta_S-\delta_I-\kappa+\psi)\}}, \\ I_e &:= \frac{\lambda(a-\beta-\delta_I-\kappa)}{a(\delta_I+\kappa)+(\beta+\delta_I+\kappa)(\delta_S-\delta_I-\kappa+\psi)}. \end{aligned}$$

Világos, hogy ezek az egyensúlyi helyzetek – mint konstans függvények – megoldásai a (3) reakció-diffúzió-differenciálegyenletnek is. Ezeknek a megoldásoknak a stabilitását a linearizálás módszerével fogjuk megvizsgálni. Mielőtt azonban ezt megvizsgálnánk, reakció-diffúziós-differenciálegyenlet esetén is megfogalmazzuk, hogy mit értünk az adott vegyes feladat megoldásának stabilitásán.

**2.3. Definíció.** *(vö. [5]) Azt mondjuk, hogy az* (3)-(4)-(5) *vegyes feladat* $\mathbf{\Psi} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^3$ *megoldása*

- *(Ljapunov ill. neutrális értelemben) stabilis, ha*

  **i)** *van olyan* $\sigma > 0$*, hogy az* (3)-(4) *peremérték-feladat minden, a* $\|\mathbf{\Psi}_0(\cdot) - \mathbf{\Phi}_0(\cdot)\| < \sigma$ *feltételnek eleget tévő* $\mathbf{\Phi}$ *megoldása értelmezve van az* $\Omega \times (0, +\infty)$ *hengeren, és*

  **ii)** *minden* $\varepsilon > 0$*-hoz van olyan* $\delta \in (0, \sigma)$*, hogy ha* $\|\mathbf{\Psi}_0(\cdot) - \mathbf{\Phi}_0(\cdot)\| < \delta$*, akkor bármely* $0 < t \in \mathbb{R}$ *esetén* $\|\mathbf{\Psi}_0(\cdot, t) - \mathbf{\Phi}_0(\cdot, t)\| < \varepsilon$*.*

- *(Ljapunov értelemben) aszimptotikusan stabilis, ha stabilis, továbbá van olyan* $\eta \in (0, \sigma)$*, hogy a* (3)-(4) *peremérték-feladat minden a* $\|\mathbf{\Psi}_0(\cdot) - \mathbf{\Phi}_0(\cdot)\| < \sigma$ *feltételnek eleget tévő* $\mathbf{\Phi}$ *megoldása esetén*

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\|\mathbf{\Psi}_0(\cdot, t) - \mathbf{\Phi}_0(\cdot, t)\|\right) = 0.$$

A fentebb említett állandómegoldás stabilitására a linearizálás módszerével adunk feltételt. Legyen $\mathfrak{E}^* \in \{\mathfrak{E}_b, \mathfrak{E}_e\}$, majd tekintsük ehhez a (3)-(4)-(5) vegyes feladat linearizált változatát:

$$\partial_t \mathbf{v} = D\Delta_{\mathbf{r}}\mathbf{v} + \mathbf{f}'(\mathfrak{E}^*)\mathbf{v} \tag{8}$$

$$(\mathbf{n}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \qquad ((\mathbf{r}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+), \tag{9}$$

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = \mathbf{v}_0(\cdot) \qquad ((\mathbf{r}, t) \in \overline{\Omega} \times \{0\}). \tag{10}$$

A Fourier-módszer felhasználásával ennek a lineáris vegyes feladatnak a megoldása (vö. [5]):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\mathbf{r}) \exp(\mathfrak{A}_n t)\, \mathbf{\Lambda}_n,$$

ahol tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\mathfrak{A}_n := \mathbf{f}'(\mathfrak{E}^*) - \lambda_n D, \qquad \mathbf{\Lambda}_n := \int_\Omega \mathbf{v}_0(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$$

továbbá $\lambda_n$ és $\psi_n$ az alábbi egyenletek megoldásai:

$$\Delta_{\mathbf{r}}\psi = -\lambda\psi, \qquad \partial_{\mathbf{n}}\psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Az $\mathfrak{E}^*$ egyensúlyi helyzet stabilitásának eldöntésére az alábbi tételben megfogalmazott eredményt használjuk.

**2.4. Tétel.** *(vö. [2], [3]) Ha*

- *tetszőleges* $n \in \mathbb{N}_0$ *index esetén az* $\mathfrak{A}_n$ *mátrix Hurwitz-stabilis (sajátértékeinek valós része negatív előjelű), akkor a* (3) *rendszer* $\mathfrak{E}^*$ *egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis;*
- *valamely* $n \in \mathbb{N}_0$ *index esetén az* $\mathfrak{A}_n$ *mátrix labilis, akkor a* (3) *rendszer* $\mathfrak{E}^*$ *egyensúlyi helyzete labilis.*

Az egyszerűség kedvéért az $\Omega = [0, l]$ esetre szorítkozunk $(l > 0)$. Ekkor az $\mathfrak{A}_n$ mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\det(\mathbf{f}'(\mathfrak{E}^*) - \lambda_n D - \mu I) = 0,$$

ahol $I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jelöli az egységmátrixot, továbbá

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

Mivel az

$$\mathbf{f}'(\mathfrak{E}_e) = \begin{bmatrix} -\frac{a^2+(\beta+\delta_I+\kappa)^2+a(\delta_S-2(\beta+\delta_I+\kappa)+\psi)}{a} & 0 & \frac{a\beta-(\beta+\delta_I+\kappa)^2}{a} \\ \psi & -\delta_E & \kappa \\ \frac{(\beta+\delta_I+\kappa-a)^2}{a} & 0 & \frac{(\beta+\delta_I+\kappa-a)(\beta+\delta_I+\kappa)}{a} \end{bmatrix}$$

mátrix stabilis (vö. [6]), ezért (vö. [7])

$$\det\begin{bmatrix} -\delta_E & \kappa \\ 0 & \frac{(\beta+\delta_I+\kappa-a)(\beta+\delta_I+\kappa)}{a} \end{bmatrix} = -\frac{\delta_E}{a}\cdot((\beta+\delta_I+\kappa-a)(\beta+\delta_I+\kappa)) < 0$$

következtében a $(d_S, d_E, d_I)$ diffiziós együtthatók alkalmas megválasztásával elérhető, hogy az $\mathfrak{A}_n$ mátrix, következésképpen az (3) egyenlet $\mathfrak{E}_e$ egyensúlyi helyzete ne legyen stabilis.

# Hivatkozások


[1] Britton, Nicholas F.: *Reaction-diffusion equations and their applications to biology.*, Elsevier Academic Press Inc, USA United States, 1986.

[2] Casten, R. G.; Holland, C. J.: *Stabilitity properties of solutions to systems of reaction-diffusion equations*, SIAM J. Appl. Math. **33** (1977), 353–364.

[3] Casten, R. G.; Holland, C. J.: *SInstability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions*, J. Differential Equations **27** (1978), 266–273.

[4] Chueh, K. N.; Conley, C. C.; Smoller, J. A.: *Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations*, Indiana Univ. Math. J. **26**(2) (1977), 373–392.

[5] Farkas, M.: *Dynamical models in biology*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 2001.

[6] Kovács, S.; György, Sz.; Gyúró, N.: *Dynamics of an SIS epidemic model with no vertical transmission* In: Trends in Biomathematics: Selected Works from the 22th BIOMAT Consortium Lectures, Rio de Janeiro, Brazil, 2022 Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

[7] Wang, L.; Li, M. Y.: *Diffusion-Driven Instability in Reaction-Diffusion Systems*, J. Math. Anal. Appl. **254**(1) (2001), 138–153.