Járványterjedést modellező reakció-diffúzió-differenciálegyenletek kvalitatív tulajdonságai

Gálffy Veronika

Témavezető: Dr. Kovács Sándor

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2023. június 2.

Munka a félév során

1. Szakirodalom feldolgozása:
   - Britton: Reaction-diffusion equations and their applications to biology (első hat fejezet, [1]),
   - Casten, R. G.; Holland, C. J.: Stability properties of solutions to systems of reaction-diffusion equations ([2]),
   - Kovács, S.: Oscillations in Biological Systems ([6]),
   - Wang, L.; Li, M. Y.: Diffusion-Driven Instability in Reaction-Diffusion Systems ([8]).
2. Az elmélet konkrét példán való alkalmazása (vö. [7]).

A modell

SIS-modell

A [7] tanulmányban a szerzők a következő közönséges autonóm differenciálegyenlet-rendszert tanulmányozták:

$$\left.\begin{aligned} \dot{S} &:= \lambda - \frac{aSI}{S+I} + \beta I - \psi S - \delta_S S, \\ \dot{E} &:= \psi S + \kappa I - \delta_E E, \\ \dot{I} &:= \frac{aSI}{S+I} - \kappa I - \beta I - \delta_I I. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

- $\delta_k > 0$: halálozási ráta ($k \in \{S, E, I\}$),
- $\lambda > 0$ a születési ráta vertikális transzmisszió nélkül,
- $a > 0$ az egy fertőzésre jutó érintkezések átlagos számával kapcsolatos ráta,
- $\beta > 0$ a felépült egyedek újra fogékonyak lesznek,
- $\kappa > 0$, ill. $\psi > 0$ a veszélyeztetettek, illetve a fertőzöttek oktatási rátája, ahol feltesszük, hogy $\kappa \leq a$ teljesül (vö. [7]).

Egyensúlyi helyzetek

A [7] tanulmányban a szerzők megmutatták, hogy ha

$$\mathcal{R}_0 := \frac{a}{\kappa + \beta + \delta_I}$$

jelöli az elemi reprodukciós számot, akkor

- $\mathcal{R}_0 < 1$ esetén a rendszernek egy egyensúlyi helyzete van:

$$\mathfrak{E}_b := \left(\frac{\lambda}{\delta_S + \psi}, \frac{\lambda\psi}{\delta_E(\delta_S + \psi)}, 0 \right),$$

- $\mathcal{R}_0 > 1$ esetén két egyensúlyi helyzet: $\mathfrak{E}_b$ és $\mathfrak{E}_e := (S_e, E_e, I_e)$, ahol

$$\begin{aligned}
S_e &:= \frac{\lambda(\beta + \delta_I + \kappa)}{a(\delta_I + \kappa) + (\beta + \delta_I + \kappa)(\psi + \delta_S - \delta_I - \kappa)}, \\
E_e &:= \frac{a\kappa\lambda + \lambda(\beta + \delta_I + \kappa)(\psi - \kappa)}{\delta_E \left\{ a(\delta_I + \kappa) + (\beta + \delta_I + \kappa)(\delta_S - \delta_I - \kappa + \psi) \right\}}, \\
I_e &:= \frac{\lambda(a - \beta - \delta_I - \kappa)}{a(\delta_I + \kappa) + (\beta + \delta_I + \kappa)(\delta_S - \delta_I - \kappa + \psi)}.
\end{aligned}$$

A rendszer

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t \mathrm{u} & = & D\Delta_{\mathrm{r}}\mathrm{u} + \mathrm{f}(\mathrm{u}), \\ (\mathrm{n}\cdot\nabla_{\mathrm{r}})\mathrm{u}(\mathrm{r},t) & = & 0 \qquad ((\mathrm{r},t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_0^+), \\ \mathrm{u}(r,t) & = & \mathrm{u}_0(r) \qquad ((\mathrm{r},t)\in\overline{\Omega}\times\{0\}), \end{array}\right\} \qquad (2)$$

ahol

$$D := \begin{bmatrix} d_S & 0 & 0 \\ 0 & d_E & 0 \\ 0 & 0 & d_I \end{bmatrix}.$$

- $\mathfrak{E}_b$ és $\mathfrak{E}_e$ egyensúlyi helyzete a (2) rendszernek is.
- A [7] tanulmányban a szerzők megmutatták, hogy a fázistér pozitív oktánsa (pozitívan) invariáns halmaz. Cél ugyanez igazolása a (2) reakció-diffúzió-rendszerre is.

Pozitivitás 1.

Lemma [4]

Legyen $d, m \in \mathbb{N}$, ill.

$$\Sigma := \bigcap_{k=1}^{m} \{\mathrm{r} \in U : \ G_k(\mathrm{r}) \leq 0\},$$

ahol $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz és $G_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ olyan $\mathfrak{C}^1$ függvények, amelyek ∇G_i gradiense sehol sem tűnik el ($k \in \{1, \ldots, m\}$). Ha tetszőleges $\mathrm{r} \in \partial\Sigma$ pontban minden $k \in \{1, \ldots, m\}$ indexre

(i) $\nabla G_i(\mathrm{r})$ a D diffúziómátrix bal oldali sajátvektora;

(ii) a G_i függvény kvázi-konvex, azaz bármely $\mathrm{r} \in U$, ill $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^d$ esetén a $\langle \nabla G_i(\mathrm{r}), \mathrm{s}\rangle = 0$ egyenlőség következménye: $\langle \mathrm{s}, \nabla^2 G_i(\mathrm{r})\mathrm{s})\rangle \geq 0$;

(iii) $\langle \nabla G_i(\mathrm{r}), \mathrm{f}(\mathrm{r})\rangle < 0$,

akkor Σ a (2) típusú rendszert illetően pozitívan invariáns halmaz.

Ha

$$\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^3$$

megoldása (2)-nek, úgy

- $\Phi_3 \equiv 0$ megoldása (2) harmadik egyenletének, így az egyértelműség következtében tetszőleges $0 < t \in \mathbb{R}$ időpontban $\Phi_3(t) > 0$;
- a

  $$G_1(S, E, I) :\equiv -S, \qquad \text{ill.} \qquad G_2(S, E, I) :\equiv -E$$

  függvényekkel teljesülnek a lemma feltételei.

$$\Longrightarrow \qquad \text{A pozitív oktáns invariáns halmaz.}$$

Linearizálás

Legyen $\mathfrak{E}^* \in \{\mathfrak{E}_b, \mathfrak{E}_e\}$, ekkor a (2) rendszer $\mathfrak{E}^*$-beli linearizáltja:

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t \mathrm{v} & = & D\Delta_\mathrm{r}\mathrm{v} + \mathrm{f}'(\mathfrak{E}^*)\mathrm{v}, \\ (\mathrm{n}\cdot\nabla_\mathrm{r})\mathrm{v}(\mathrm{r},t) & = & 0 \qquad ((\mathrm{r},t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_0^+), \\ \mathrm{v}(r,t) & = & \mathrm{v}_0(r) \qquad ((\mathrm{r},t)\in\overline{\Omega}\times\{0\}), \end{array}\right\} \tag{3}$$

(3) megoldása Fourier-módszerrel (vö. [5]):

$$\mathrm{v}(\mathrm{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\mathrm{r}) \exp\left(\mathfrak{A}_n t\right) \boldsymbol{\Lambda}_n,$$

ahol tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\mathfrak{A}_n := \mathrm{f}'(\mathfrak{E}^*) - \lambda_n D, \qquad \boldsymbol{\Lambda}_n := \int_\Omega \mathrm{v}_0(\mathrm{r})\psi_n(\mathrm{r})\,\mathrm{dr},$$

továbbá λ_n és ψ_n az alábbi egyenletek megoldásai:

$$\Delta_\mathrm{r}\psi = -\lambda\psi, \qquad \partial_\mathrm{n}\psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Stabilitás

$\Omega = [0, l]$ esetre szorítkozunk ($l > 0$), vagyis ekkor $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$. Így az $\mathfrak{A}_n$ mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\det(\mathrm{f}'(\mathfrak{E}^*) - \lambda_n D - \mu I) = 0.$$

Tudjuk (vö. [7]), hogy az $\mathrm{f}'(\mathfrak{E}_e) =$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{a^2+(\beta+\delta_I+\kappa)^2+a(\delta_S-2(\beta+\delta_I+\kappa)+\psi)}{a} & 0 & \frac{a\beta-(\beta+\delta_I+\kappa)^2}{a} \\ \psi & -\delta_E & \kappa \\ \frac{(\beta+\delta_I+\kappa-a)^2}{a} & 0 & \frac{(\beta+\delta_I+\kappa-a)(\beta+\delta_I+\kappa)}{a} \end{bmatrix}$$

mátrix stabilis.

Diffúziós instabilitás kérdése

Legyen $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Minden $1 \leq k \leq d$-re jelölje I_k a következő halmazt:

$$I_k = \{(i_1, i_2, \dots i_k) \mid 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq d\}$$

Bármely $J \in I_k$-ra jelölje $P_J(A)$ az A-nak a J-re vontkozó fő részmátrixát.

Minor feltétel

Azt mondjuk, hogy az A mátrix teljesíti a minorfeltételt, ha $(-1)^k \det(P_J(A)) \geq 0$ minden $J \in I_k$-ra és $1 \leq k \leq d$-re.

A felhasznált tétel (vö. [8])

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} = f'(\mathfrak{E}^*)$ stabilis. Ekkor a (2) rendszer $\mathfrak{E}^*$ egyensúlyi helyzete labilis valamilyen $D \geq 0$-ra, ha $\mathfrak{A}$ nem teljesíti a minor feltételt.

Diffúziós instabilitás kérdése $\mathfrak{E}_e$-ben

Tétel

Mivel $f'(\mathfrak{E}_e)$ stabilis mátrix (vö. [7]) és $f'(\mathfrak{E}_e)$ nem teljesíti a minorfeltételt, ezért alkalmas

$$D := \begin{bmatrix} d_S & 0 & 0 \\ 0 & d_E & 0 \\ 0 & 0 & d_I \end{bmatrix}.$$

diffúziós mátrix esetén az

$$\mathrm{f}'(\mathfrak{E}_e) - \lambda_n D$$

mátrix nem stabilis.

$$\Longrightarrow \qquad \text{Turing-mintázat kialakulása lehetséges.}$$

Köszönöm a figyelmet!

- Britton, Nicholas F.: *Reaction-diffusion equations and their applications to biology.*, Elsevier Academic Press Inc, USA United States, 1986.
- Casten, R. G.; Holland, C. J.: *Stability properties of solutions to systems of reaction-diffusion equations*, SIAM J. Appl. Math. **33** (1977), 353–364.
- Casten, R. G.; Holland, C. J.: *SInstability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions*, J. Differential Equations **27** (1978), 266–273.
- Chueh, K. N.; Conley, C. C.; Smoller, J. A.: *Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations*, Indiana Univ. Math. J. **26**(2) (1977), 373–392.
- Farkas, M.: *Dynamical models in biology*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 2001.

Kovács, S.: *Oscillations in Biological Systems*, In: Mondaini, Rubem P. (szerk.) Trends in Biomathematics: Stability and Oscillations in Environmental, Social, and Biological Models : Selected Works from the BIOMAT Consortium Lectures, Rio de Janeiro, Brazil, 2021 Cham, Svájc : Springer-Verlag (2022) 412 p. pp. 79-97. , 19 p.

Kovács, S.; György, Sz.; Gyúró, N.: *Dynamics of an SIS epidemic model with no vertical transmission* In: Trends in Biomathematics: Selected Works from the 22th BIOMAT Consortium Lectures, Rio de Janeiro, Brazil, 2022 Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Wang, L.; Li, M. Y.: *Diffusion-Driven Instability in Reaction-Diffusion Systems*, J. Math. Anal. Appl. **254**(1) (2001), 138–153.