

Kombinatorikai feladatok megoldása SAT-solverrel

Önálló projekt, szakmai gyakorlat II.

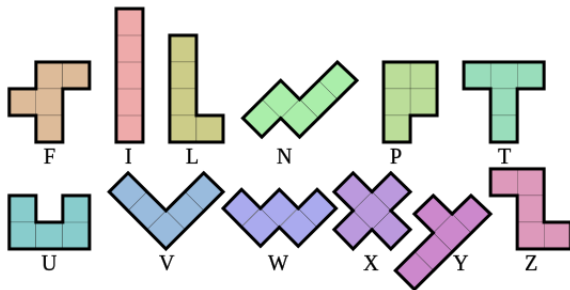
Dankó Dorottya

Témavezető: Damásdi Gábor

2023. május 31.

A pentominó készlet

- n-rendű poliominó: n db egységnégyzetből kirakható sokszög úgy, hogy az egységnégyzetek teljes oldallal illeszkednek egymáshoz
- pentominó: 5-rendű poliominó
- pentominó készlet: a lenti 12 db pentominó



A pentominó feladat

Feladat

Adott $n, m \in \mathbb{Z}$. Fedjük le az $n \times m$ méretű négyzetrácsot a pentominó készlettel úgy, hogy

- 1 minden darabot pontosan egyszer használunk fel
 - 2 az alakzatok ne fedjék egymást
 - 3 ne maradjon fedetlen mező.
- Tükrözés és forgatás megengedett
 - Két megoldás különböző, ha az egyik nem kapható meg a másik teljes lefedett téglalapjának elforgatásával és tükrözésével
 - Szükséges feltétel: $n \times m = 60$

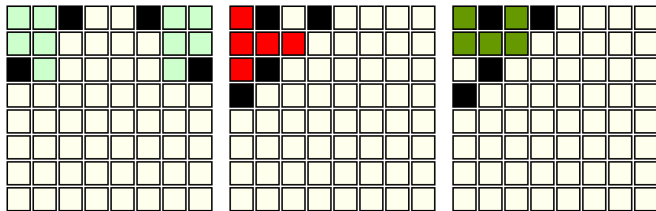
Ismert eredmények

Téglalap mérete	Különböző megoldások száma
6×10	2339
5×12	1010
4×15	368
3×20	2

- Colin Brian Haselgrove és Jenifer Haselgrove (1960): első megoldás a 6×10 -es esetre
- Donald Knuth: Algorithm X, hatékony algoritmus fedési feladatokra

A 8×8 -as feladat

- Dana S. Scott (1958): hányféleképpen fedhető le a 8×8 -as saktábla úgy, hogy a középső négy cella marad fedetlenül?
 - ▶ 65 különböző megoldás
 - ▶ A backtracking módszer egyik legkorábbi alkalmazása
- A 8×8 -as saktábla négy mezejét kihagyva a kapott alakzat mikor fedhető le a pentominó készlettel? A következő két eset kivételével mindig:



SAT-solverek

- SAT-probléma: adott logikai formula kielégíthető-e
- NP-teljes
- SAT-solver: olyan program, ami megold egy SAT-feladatot
- Pythonban PySAT könyvtár, Glucose3 solver
- Az összes különböző megoldás is megkereshető

A probléma átfoglalozása konjunktív normálforma alakba

- input: n, m
- alakzat $\rightarrow A \in \{0, 1\}^{5 \times 5}$
- minden alakzatra eltároltam a különböző lehelyezéseket (a száma az alakzat szimmetriáitól függően eltérő)
- logikai változók: $x_{i,j,s,o}$ „igaz” \iff az i -edik sor j -edik oszlop a bal felső sarka annak az 5×5 -ös négyzetnek, amiben az s -edik sorszámú alakzat az o -adik különböző orientációban helyezkedik el
- i és j nem feltétlenül esik a lefedendő négyzetbe $\implies (n + 4) \times (m + 4)$ méretű téglalap
- A jobb alsó sarok $n \times m$ -es négyzetrácsa lesz a megoldás

A feltételek átfoglalozása

- 1 minden alakzat a lefedendő téglalapon belül helyezkedik el
 - ▶ ellenőrző függvény: „igaz” output, ha az alakzat nem teljesen a lefedendő téglalapon belül van
 - ▶ minden i, j, s, o -ra meghívom, a rossz lehelyezéseknek nem hozok létre változót
- 2 minden alakzat pontosan egyszer fordul elő a fedésben
 - ▶ minden alakzathoz eltárolom, hogy mely i, j, s, o lehelyezésekhez használjuk
 - ▶ a kigyűjtött változókból pontosan egy legyen igaz: `pysat.card CardEnc.equals()`
- 3 minden mezőt pontosan egy alakzat fed
 - ▶ minden mezőhöz eltárolom, hogy mely i, j, s, o lehelyezések fedik
 - ▶ `pysat.card CardEnc.equals()`

A 8×8 -as feladat esetén az üresen hagyandó mezőkre nem a `CardEnc.equals()`-t hívtam meg, hanem hozzáadtam, hogy azokat ne fedje semmi.

A különböző megoldások kiszűrése

Ne legyen két megoldás, hogy az egyik a másiknak elforgatásával és tükrözésével előáll:

- P pentominó orientációjának lerögzítése
- a téglalapfedésnél két irányban állhat (90° -os elforgatás)
- a sakktábla fedésnél csak egy irányban állhat

A `CardEnc.equals()` segédváltozókat vesz fel, két megoldás nem különböző, ha csak a segédváltozókból tér el

- minden megoldás megtalálása után új klóz felvétele
- a megoldásban „igaz” változókat negálva belerakjuk egy klózba

Eredmények

Mind a négy lefedhető téglalap méretre megtalálta az összes megoldást (kirajzolta és a számukat kiírta). Példa:



1. ábra. A 6×10 -es téglalap



2. ábra. Az 5×12 -es téglalap



3. ábra. A 4×15 -ös téglalap



4. ábra. A 3×20 -as téglalap

Eredmények a sakktábla fedésre

A középső négy mező kihagyásával megtalálta mind a 65 megoldást.
Futtattam más mezők kihagyásával kapott alakzatokra is.



5. ábra. A középső cellák kihagyása



6. ábra. Négy random kihagyott cella