MEGSZORÍTOTT FEEDBACK ARC SET ÉS SORBARENDEZÉSI FELADATOK
Önálló projekt, szakmai gyakorlat II. beszámoló

Borsik Nóra

1. Bevezetés

Az Önálló Projekt tárgy keretein belül folytattuk a szakdolgozatomban bevezetett $(f, g; \sum w)$-FAS feladat általánosításainak és alkalmazásainak a vizsgálatát. A beszámolóban először ismertetjük az eddigi eredményeket, majd rátérünk az ebben a félévben érintett kérdésekre.

Az $(f, g; \sum w)$-FAS feladat során adott egy $D = (V, E)$ irányított hurokélmentes gráf, egy $w : E \to \mathbb{R}_+$ élsúlyozással. A csúcsokon adott egy $f : V \to \mathbb{R}_+$ alsó korlát és egy $g : V \to \mathbb{R}_+$ felső korlát. Azt szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e olyan sorrendje a csúcsoknak, mely szerint minden v csúcsra teljesül, hogy $f(v) \leq \overleftarrow{\delta}^w(v) \leq g(v)$, azaz minden csúcsnak a sorrend szerinti bal súlyozott kifoka a csúcshoz tartozó alsó és felső korlát között van. A feladat élsúlyozatlan esetét (f, g)-FAS feladatnak nevezzük.

Az (f, g)-FAS feladatra tekinthetünk az [5] cikkben irányítatlan gráfokra bevezetett feladat irányított gráfokon értelmezett általánosításaként.

2. Eddigi eredmények

2.1. Megoldható esetek

Az $(f, g; \sum w)$-FAS feladat polinom időben megoldható, ha minden csúcsra csak felső korlát adott. Ehhez tekintsük azt az algoritmust, amely minden lépésben rögzít az utolsó szabad helyre egy csúcsot, melynek a súlyozott kifoka legfeljebb akkora mint a $g(v)$ felső korlát, és törli a gráfból. Ha az algoritmus nem akad el, akkor megengedett megoldást ad. Beláttuk, hogy ha elakad, akkor nem létezhet megoldás. Ebből következik, hogy pontosan akkor létezik $(-\infty, g; \sum w)$-FAS problémára megengedett megoldás, ha nem létezik olyan feszített részgráf, melyben minden v csúcsnak a részgráfra megszorított súlyozott kifoka nagyobb mint a $g(v)$ felső korlát. Hasonló algoritmus, illetve karakterizáció adható a feladat csak alsó korlátos esetére. Továbbá a feladat akkor is megoldható, ha vegyesen adottak alsó és felső korlátok, de minden csúcsra vagy csak alsó vagy csak felső korlát adott.

2.2. Nehézségi eredmények

Az algoritmus egyszerűsége miatt felmerül az $(f, g; \sum w)$-FAS feladat nehézsége kis módosítások esetén. Beláttuk, hogy a feladat már egyszerű gráfokon is NP-teljes, ha egyetlen csúcsra pontos előírás, a többi csúcsra csak felső korlát adott. Hasonló természetes módosítás, ha nem követeljük meg az élsúlyozás nemnegativitását. Beláttuk, hogy ez a feladat is NP-teljes.

Vizsgáltuk az élsúlyozatlan (f, g)-FAS feladatot speciális korlátok esetén, például ha minden csúcsra azonos alsó és felső korlátok adottak. Beláttuk, hogy a feladat NP-teljes, már akkor is ha a gráf minden csúcsának a súlyozatlan értelemben vett foka legfeljebb 6, és az $f \equiv g$ korlát egy csúcsban 0, a többiben 1.

A speciális korlátos esetek másik véglete, ha minél nagyobb a különbség az egyes csúcsokhoz tartozó alsó és felső korlát között. Azzal a feladattal foglalkoztunk, amikor adott egy s első csúcs és egy t utolsó csúcs, melyekre $f(s) = g(s) = 0$ és $f(t) = g(t) = \delta(t)$ és minden $v \neq \{s, t\}$ csúcsra $f(v) = a$ és $g(v) = \delta(v) - b$ korlátok adottak, valamely a és b konstansokra. Szemléletesen olyan csúcssorrendet keresünk, melyben s az első csúcs, t az utolsó és minden köztes csúcsból kiindul balra legalább a darab és jobbra legalább b darab él. A „legtágabb" korlátos $a = b = 1$ paraméteres esetben olyan csúcssorrendet keresünk, melyben az s és a t csúcs kivételével minden csúcsból kiindul legalább egy él balra és legalább egy él jobbra. A szakirodalomban ezt a feladatot irányított gráfokon értelmezett s-t számozás feladatnak nevezik és ismert, hogy polinom időben megoldható [3]. Bebizonyítottuk, hogy a feladat lényegében bármilyen szigorúbb korlátok esetén NP-teljes, azaz tetszőleges $a \geq 1$ és $b \geq 2$ paraméterek esetén.

2.3. Alkalmazások

2.3.1. Befenyvesre és aciklikus részgráfra bontás

A feladat egy érdekes alkalmazásaként polinom időben eldönthető, hogy egy irányított gráf felbomlik-e egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára. Megmutattuk, hogy pontosan akkor létezik ilyen felbontás, ha a $g \equiv 1$ felső korlátos $(-\infty, g)$-FAS feladat megoldható, azaz ha nem létezik olyan feszített részgráf, amelyben minden csúcsnak a részgráfra megszorított kifoka legalább 2. Azonban igazoltuk, hogy legkisebb élszámú befenyvesre és aciklikus gráfra való felbontást keresni NP-nehéz feladat.

A befenyvesre és aciklikus részgráfra bonthatóság akkor is megoldható, ha bizonyos csúcsokról megköveteljük, hogy a befenyvesben gyökerek legyenek (lehet, hogy más csúcsok is gyökerek lesznek). Ennek a feladatnak a nehézsége nyitott kérdés, ha pontosan egy gyökeret követelünk meg, azaz befenyőre és aciklikus részgráfra bontást keresünk. Azonban ismert, hogy befenyőre és feszítő aciklikusra bonthatóság NP-teljes [1]. Megmutattuk, hogy minimális költségű befenyőre és aciklikus gráfra bonthatóság NP-nehéz feladat, már 0-1 élköltségek esetén is.

Hasonló gráffelbontási feladatok Hasonló gráffelbontási feladatokkal foglalkoztak egy szeptemberi cikkben, például belátták, hogy NP-teljes annak eldöntése, hogy egy gráf felbomlik-e egy irányított kör és egy aciklikus részgráf uniójára, illetve egy irányított diszjunkt körfedés és egy aciklikus részgráf uniójára [1]. Foglalkoztunk párosításra és aciklikus részgráfra bonthatósággal. Megmutattuk, hogy ez a feladat már irányított páros gráfokon is NP-teljes, egy teljes párosításra és egy aciklikus részgráfra, illetve egy tetszőleges párosításra és aciklikus részgráfra bontás esetén is.

2.3.2. Egy rangsorolási feladat

Egy másik alkalmazáshoz tekintsünk egy versenyt, ahol különböző bírók sorrendeket állítanak fel a versenyzők halmazán. Egy versenyző elégedetlenségének nevezzük azon versenyzők számát, akiket megelőz a bírók többségénél, de a közös sorrendben nem. Célunk egy olyan közös sorrend meghatározása. amely minimalizálja a versenyzők elégedetlenségének a maximumát. Ezen feladat ekvivalens egy irányított gráfon egy olyan csúcssorrend keresésével, amely minimalizálja a maximális bal kifokot, így polinom időben megoldható a $(-\infty, g)$-FAS feladat segítségével. Más hasonló rangsorolási feladatok, például amikor a bírók elégedetlenségének a maximumát szeretnénk minimalizálni NP-teljesek [2].

3. Ebben a félévben vizsgált kérdések

3.1. Szimultán korlátos esetek

Ebben a félévben tovább vizsgáltuk az $(f, g; \sum w)$-FAS feladat nehézségét. Foglalkoztunk a feladat szimultán korlátos eseteivel, amikor a csúcsok $\overleftarrow{\delta}$ bal kifokára, illetve $\vec{\varrho}$ bal befokára egyszerre adott több (alsó, felső, vagy pontos) korlát. Megadtuk a szimultán korlátos esetek nehézségének teljes karakterizációját két korlát esetén, melyet az 1. táblázat foglal össze. Mivel a bal kifok alsó / felső / pontos korlát ekvivalens a jobb kifok felső / alsó / pontos korláttal (hasonlóan a bal befok alsó / felső / pontos korlát ekvivalens a jobb befok felső / alsó / pontos korláttal), ezért a táblázat implicit tartalmazza ezeket a korlátokat is. Továbbá a táblázat átlója azon esetek nehézségét tartalmazza, amikor a csúcsokra csak egyetlen típusú korlát adott.

	$\overleftarrow{\delta} \leq g_\delta$	$\overleftarrow{\delta} \geq f_\delta$	$\overleftarrow{\delta} = m_\delta$	$\vec{\varrho} \leq g_\varrho$	$\vec{\varrho} \geq f_\varrho$	$\vec{\varrho} = m_\varrho$
$\overleftarrow{\delta} \leq g_\delta$	P	NP-c	NP-c	P	NP-c	NP-c
$\overleftarrow{\delta} \geq f_\delta$		P	NP-c	NP-c	P	NP-c
$\overleftarrow{\delta} = m_\delta$			NP-c	NP-c	NP-c	P
$\vec{\varrho} \leq g_\varrho$				P	NP-c	NP-c
$\vec{\varrho} \geq f_\varrho$					P	NP-c
$\vec{\varrho} = m_\varrho$						NP-c

1. táblázat. A szimultán korlátos esetek nehézségének teljes karakterizációja. A táblázatban $\overleftarrow{\delta}$ jelöli a bal kifokot és $\vec{\varrho}$ jelöli a bal befokot. Valamint g mindig felső, f mindig alsó és m mindig pontos korlátot jelöl.

Azon esetekkel is foglalkoztunk, amikor kettőnél több korlát adott. Például ha minden paraméterre (azaz a bal kifokra, a jobb kifokra, a bal befokra és a jobb befokra) pontos előírás adott, akkor a feladat polinom időben megoldható.

3.2. Általánosítás: $(f, g; h)$-tulajdonságú sorrend feladat

Bevezettük az $(f, g; h)$-tulajdonságú sorrend feladatot, az $(f, g; \sum w)$-FAS feladat általánosításaként.

Az $(f, g; h)$-tulajdonságú sorrend feladatban egy V alaphalmaz minden v elemére adott egy $h_v : 2^{V-v} \to \mathbb{R}$ monoton növő halmazfüggvény (azaz tetszőleges $A \subseteq B \subseteq V - v$ esetén $h_v(A) \leq h_v(B)$ teljesül) és $f : V \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ alsó és felső korlátok. Azt szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e olyan σ sorrend, mely szerint minden v elemre az őt megelőző elemek $\overleftarrow{\sigma}(v)$ halmazára $f(v) \leq h_v(\overleftarrow{\sigma}(v)) \leq g(v)$ teljesül.

Speciálisan ha a h_v halmazfüggvényt úgy definiáljuk, hogy egy adott $V' \subseteq V - v$ csúcshalmazhoz a v csúcsnak a V' csúcsokra megszorított súlyozott kifokát rendeli, akkor visszakapjuk az $(f, g; \sum w)$-FAS feladatot.

Általánosítottuk a $(-\infty, g; \sum w)$-FAS feladatra adott algoritmust a $(-\infty, g; h)$-tulajdonságú sorrend feladatra. Tehát a $(-\infty, g; h)$-tulajdonságú sorrend feladat polinom időben megoldható, ha a h_v halmazfüggvények hatékonyan kiértékelhetőek. A továbbiakban mutatunk egy ütemezéselméleti alkalmazást erre az általánosabb feladatra.

3.2.1. Ütemezéselméleti alkalmazások

$1|g$-**prec**$|L_{\max}$ **feladat** Tekintsük az alábbi egygépes ütemezési feladatot: Adott munkák egy $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ halmaza és adottak megelőzési feltételek az egyes munkák között. A megelőzési feltételek egy D irányított gráf éleinek felelnek meg, amelyről a szokásostól eltérően most nem tesszük fel, hogy aciklikus. Minden v munkához tartozik egy $p(v)$ feldolgozási idő egy $d(v)$ határidő és egy $g(v)$ felső korlát az adott munkára sérthető precedencia feltételek számára. Egy ütemezés megengedett, ha minden v munkára teljesül, hogy a v-t megelőző munkák V' halmazába kiinduló élek száma legfeljebb $g(v)$. Célunk egy olyan megengedett ütemezést találni, amely minimalizálja a maximális késést.

Először tekintsük azt a feladatot, amelyben azt szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e legfeljebb K maximális késésű ütemezés egy adott $K < \sum_{v \in V} p(v)$ számra. (Ha $K \geq \sum_{v \in V} p(v)$, akkor mindig létezik legfeljebb K maximális késésű ütemezés.) Legyen

$$h_v(V') = M\Big(\delta(v, V') - g(v)\Big)^+ + \Big(\sum_{u \in V'} p(u) + p(v) - d(v)\Big)^+,$$

ahol $M = \sum_{v \in V} p(v)$. Belátható, hogy ezen h_v halmazfüggvények monoton növőek.

Beláttuk, hogy pontosan akkor létezik legfeljebb K maximális késésű megengedett ütemezés, ha a h_v halmazfüggvényekre és $g' \equiv K$ felső korlátra létezik $(-\infty, g; h)$-tulajdonságú sorrend. Ebből következik, hogy K szerinti bináris kereséssel legfeljebb $\log(M)$ alkalommal meghívva a $(-\infty, g; h)$-tulajdonságra ismert algoritmust tudunk egy minimális késésű ütemezést találni. Ez az algoritmus polinomiális, de nem erősen polinomiális. Beláttuk, hogy az algoritmus egy kis módosításával már egyetlen hívással is tudjuk a $h_v(\overline{\sigma}(v))$ értékek maximumát minimalizálni. A javított algoritmus már erősen polinomiális.

$1|g$-**prec**$|f_{\max}$ **feladat** Hasonló módon megoldható az előbbi $1|g$-prec$|L_{\max}$ feladat egy általánosítása is. Az $1|g$-prec$|f_{\max}$ feladat annyiban különbözik az $1|g$-prec$|L_{\max}$ feladattól, hogy minden v munkára a $d(v)$ határidő helyett egy f_v monoton növő függvény adott, és célunk egy olyan megengedett ütemezés meghatározása, amely minimalizálja a $\max\{f_v(t(v))\}$ értéket, ahol $t(v)$ a v munka befejezési ideje az ütemezésben.

Ez a feladat az $1|g$-prec$|L_{\max}$ feladathoz hasonlóan megoldható, az alábbi h_v halmazfüggvények esetén:

$$h_v(V') = M\Big(\delta(v, V') - g(v)\Big)^+ + f_v\Big(\sum_{u \in V'} p(u) + p(v)\Big),$$

ahol továbbra is $M = \sum_{v \in V} p(v)$. Speciálisan, ha a precedencia feltételek aciklikusak és $g \equiv 0$, akkor az erősen polinomiális algoritmust alkalmazva visszakapjuk az $1|prec|f_{\max}$ feladatra ismert LCL algoritmust [6].

3.3. Az (f, g)-FAS feladat módosításai

Foglalkoztunk a csak felső korlátos $(-\infty, g)$-FAS feladat néhány módosításának a nehézségével. Az előző félévben bevezetett d-távolságú feladat ismertetése után rátérünk az ebben a félévben vizsgált módosításokra.

A d-távolságú $(-\infty, g)$-FAS feladat A $(-\infty, g)$-FAS feladat egy természetes módosításaként előző félévben bevezettük a d-távolságú $(-\infty, g)$-FAS feladatot, melyben az egyes csúcsokhoz tartozó g felső korlát az összes csúcs helyett csak a megelőző (legfeljebb) d csúcsra vonatkozik, azaz minden $i \in \{1, \dots, |V|\}$-re az i-edik helyre kerülő csúcs előtti $\min\{d, i-1\}$ darab csúcsra. Speciálisan a $d = |V|$ esetben visszakapjuk az eredeti feladatot. Megmutattuk, hogy a d-távolságú $(-\infty, g)$-FAS feladat polinom időben megoldható, ha $d = |V| - c$ valamely c konstansra. Azonban a feladat NP-teljes, ha a csúcsszámra és a d távolságra teljesül, hogy $|V| = (d+1)(l+1) - 2$, ahol $l = \Omega(|V|^c)$ valamely $c > 0$ konstansra. Ebből speciális esetként kapjuk például, hogy a feladat nehéz a $d = 1$ és a $d = \sqrt{|V|}$ esetben.

Minimális költségű $(-\infty, g)$-FAS A feladat egy természetes módosítása, ha minden csúcs-helyezés párra adott egy c költség, és olyan $(-\infty, g)$-FAS megoldást keresünk, amely minimalizálja a költségek összegét. Ez a feladat NP-teljes, mivel a [4] cikkben bevezetett pozíció alapú ütemezési feladat egy általánosítása, amelyről belátták, hogy NP-nehéz. De a feladat approximálhatósága egy érdekes kérdés.

Lexikografikusan legkisebb $(-\infty, g)$-FAS A feladat egy másik optimalizálási verziójaként bevezettük a lexikografikusan legkisebb $(-\infty, g)$-FAS feladatot. Ekkor egy olyan $(-\infty, g)$-FAS megoldást keresünk, amelyre a csúcsok bal súlyozott kifokainak monoton csökkenő sorrendje a lexikografikusan legkisebb. Sajnos erről a feladatról is azt bizonyítottuk be, hogy NP-nehéz, mivel visszavezethető rá a minimális méretű befenyvesre és aciklikus részgráfra bontás, amelyről korábban beláttuk, hogy NP-nehéz feladat.

4. További tervek

A csak felső korlátos $(-\infty, g; h)$-tulajdonságú sorrend feladatra adott algoritmusunk $O(n^2)$ darab h_v halmazfüggvény kiértékelést használ, és létezik olyan input, amelyre ez a lépésszám becslés éles. Jelenleg a legjobb algoritmusban szükséges h_v hívások számára szeretnénk egy alsó becslést adni.

Továbbá érdekes kérdés a csak felső korlátos feladat azon általánosításának nehézsége, amikor egydimenziós sorrend helyett egy többdimenziós elhelyezést keresünk. A többdimenziós általánosítás alkalmazható lenne a 3.2.1 Fejezetben említett ütemezési feladatok többgépes változatára.

A témával részt vettem az OTDK-n valamint a 12th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications nevű konferencián. Az eredményekből egy cikk készül, melynek a rövidített változata a konferenciára leadott anyag.

Hivatkozások

[1] Jørgen Bang-Jensen, Stéphane Bessy, Daniel Gonçalves, and Lucas Picasarri-Arrieta. Complexity of some arc-partition problems for digraphs. *Theoretical Computer Science*, 928:167–182, 2022.

[2] Therese Biedl, Franz J. Brandenburg, and Xiaotie Deng. On the complexity of crossings in permutations. *Discrete Mathematics*, 309(7):1813–1823, 2009.

[3] Joseph Cheriyan and John H. Reif. Directed s-t numberings, rubber bands, and testing digraph k-vertex connectivity. *Combinatorica*, 14(4):435–451, 1994.

[4] Markó Horváth and Tamás Kis. Polyhedral results for position-based scheduling of chains on a single machine. *Annals of Operations Research*, 284(1):283–322, 2020.

[5] Zoltán Király and Dömötör Pálvölgyi. Acyclic orientations with degree constraints. *arXiv preprint arXiv:1806.03426*, 2018.

[6] Eugene L. Lawler. Optimal sequencing of a single machine subject to precedence constraints. *Management science*, 19(5):544–546, 1973.