Megszorított feedback arc set és sorbarendezési feladatok

Borsik Nóra Anna

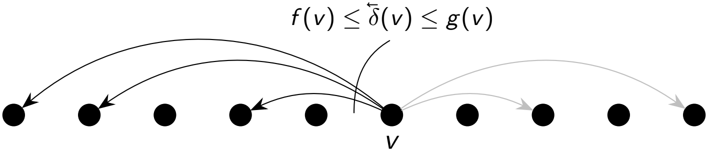
Témavezető: Madarasi Péter

Az $(f, g, \sum w)$-FAS feladat

$(f, g; \sum w)$-FAS feladat

Adott egy $D = (V, E)$ irányított gráf, egy $w : E \to \mathbb{R}_+$ élsúlyozással és $f : V \to \mathbb{R}_+$, $g : V \to \mathbb{R}_+$ alsó és felső korlátokkal.
Létezik-e olyan sorrend, mely szerint minden csúcsnak a sorrend szerinti bal súlyozott kifoka $f(v)$ és $g(v)$ között van?

Élsúlyozatlan esetben (f, g)-FAS feladatnak nevezzük.



Egyoldali korlátok

Tétel

A csak felső korlátos $(-\infty, g, \sum w)$-FAS feladat polimon időben megoldható.

Algoritmus: Minden lépésben rögzít az utolsó szabad helyre egy v csúcsot, amely nem sérti a $g(v)$ felső korlátot, és törli a gráfból.
Ha valamikor nem létezik ilyen csúcs, akkor nem létezik megoldás:

Tétel

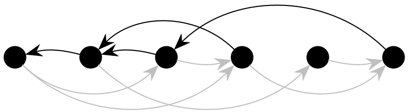
A $(-\infty, g; \sum w)$-FAS feladatnak pontosan akkor létezik megengedett megoldása, ha nem létezik olyan feszített részgráf, amelyben minden csúcs súlyozott kifoka nagyobb mint a $g(v)$ felső korlát.

A csak alsó korlátos eset hasonló.

Alkalmazás: befenyvesre és aciklikus részgráfra bontás

Tétel

Egy irányított gráf pontosan akkor egy befenyves és egy aciklikus gráf uniója, ha a $g \equiv 1$ korlátos $(-\infty, g)$-FAS feladat megoldható, azaz nem létezik olyan feszített részgráf, amelyben minden csúcs kifoka legalább 2.



Tétel

Irányított gráfban NP-nehéz egy legkisebb befenyvest keresni, melynek komplementere aciklikus.

Egyéb felbontások

Tétel

NP-teljes eldönteni, hogy egy irányított páros gráf felbomlik-e egy (teljes) párosítás és egy aciklikus részgráf uniójára.

Tétel (Bang-Jensen, Bessy, Gonçalves és Picasarri-Arrieta, 2022)

NP-nehéz eldönteni, hogy egy irányított gráf felbomlik-e egy irányított kör és egy aciklikus részgráf uniójára.

Tétel (Bang-Jensen, Bessy, Gonçalves és Picasarri-Arrieta, 2022)

NP-nehéz eldönteni, hogy egy irányított gráf felbomlik-e egy diszjunkt irányított körfedés és egy aciklikus részgráf uniójára.

Nyitott kérdés: Befenyőre és aciklikus részgráfra bonthatóság nehézsége.

Nehézségi eredmények

Az csak felső korlátos eset már kis módosításokkal NP-teljessé válik.

Tétel

Az (f, g)-FAS feladat NP-teljes, ha egy csúcsra pontos előírás, a többi csúcsra csak felső korlát adott.

Tétel

A $(-\infty, g; \sum w)$-FAS feladat NP-teljes, ha megengedünk negatív $w(e)$ élsúlyokat.

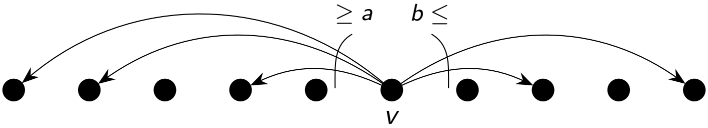
Azonos korlátos eset

Tétel

Az (f, g)-FAS probléma NP-teljes az $f \equiv g$ esetben. A feladat már akkor is nehéz, ha minden csúcs súlyozatlan értelemben vett foka legfeljebb 6, és az $f \equiv g$ korlát egy csúcsban 0, a többiben 1.

Tág korlátos eset

Az első és az utolsó csúcs kivételével $f(v) = a$, $g(v) = \delta(v) - b$ korlátos (f, g)-FAS feladat.
Azaz olyan sorrendet keresünk, melyben minden nem szélső csúcsból kiindul balra legalább a és jobbra legalább b él.



Az $a = b = 1$ esetben az úgynevezett s-t számozás feladatot kapjuk.

Tétel (Cheriyan és Reif, 1994)

A feladat polinom időben megoldható $a = b = 1$ paraméterek esetén.

Tétel

A feladat NP-teljes tetszőleges $a \geq 1$ és $b \geq 2$ paraméterek esetén.

Szimultán korlátok

	$\overleftarrow{\delta} \leq g_\delta$	$\overleftarrow{\delta} \geq f_\delta$	$\overleftarrow{\delta} = m_\delta$	$\vec{\varrho} \leq g_\varrho$	$\vec{\varrho} \geq f_\varrho$	$\vec{\varrho} = m_\varrho$
$\overleftarrow{\delta} \leq g_\delta$	P	NP-c	NP-c	P	NP-c	NP-c
$\overleftarrow{\delta} \geq f_\delta$		P	NP-c	NP-c	P	NP-c
$\overleftarrow{\delta} = m_\delta$			NP-c	NP-c	NP-c	P
$\vec{\varrho} \leq g_\varrho$				P	NP-c	NP-c
$\vec{\varrho} \geq f_\varrho$					P	NP-c
$\vec{\varrho} = m_\varrho$						NP-c

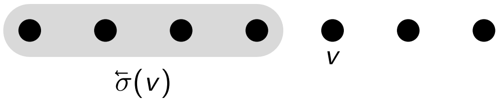
A táblázatban $\overleftarrow{\delta}$ jelöli a bal kifokot és $\vec{\varrho}$ jelöli a bal befokot. Valamint g mindig felső, f mindig alsó és m mindig pontos korlátot jelöl.

Általánosítás

$(f, g; h)$-tulajdonságú sorrend feladat

Egy V alaphalmaz minden v elemére adott egy $h_v : 2^{V-v} \to \mathbb{R}$ monoton növő halmazfüggvény és $f : V \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ alsó és felső korlátok. Létezik-e olyan σ sorrend, mely szerint minden v elemre az őt megelőző elemek $\overleftarrow{\sigma}(v)$ halmazára $f(v) \le h_v(\overleftarrow{\sigma}(v)) \le g(v)$?

A csak felső, illetve csak alsó korlátos esetekre könnyen általánosíthatóak az $(f, g; \sum w)$-FAS feladatra adott algoritmusok.



Ütemezés: $1|g\text{-prec}|L_{max}$

Adottak:

- „precedencia” feltételek (nem feltétlen aciklikus)
- $g(v)$: felső korlát v munkára a sérülő feltételek számára
- $p(v)$: a v munka feldolgozási ideje
- $d(v)$: a v munka határideje

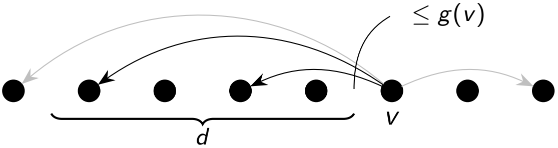
Cél: maximális késés minimalizálása

Tekintsük az alábbi $(-\infty, g; h)$-tulajdonságú sorrend feladatot:
$h_v(V') = M(\delta(v, V') - g(v))^+ + (\sum_{u \in V'} p(u) + p(v) - d(v))^+$
$g' \equiv K$
Eldönthető, hogy létezik-e legfeljebb K maximális késésű ütemezés.

Hasonlóan felírható az $1|g\text{-prec}|f_{max}$ feladat is.

Az $(-\infty, g)$-FAS feladat módosításai

- *A d-távolságú $(-\infty, g)$-FAS*: Az egyes csúcsokhoz tartozó g felső korlát csak a megelőző (legfeljebb) d csúcsra vonatkozik.



- *Minimális költségű $(-\infty, g)$-FAS*: Minden csúcs-helyezés párra adott egy c költség és minimális költségű $(-\infty, g)$-FAS megoldást keresünk.
- *Lexikografikusan legkisebb $(-\infty, g)$-FAS*: Olyan $(-\infty, g)$-FAS megoldást keresünk, amelyre a csúcsok bal kifokainak monoton csökkenő sorrendje lexikografikusan legkisebb.
- *Többdimenziós $(-\infty, g)$-FAS*: Egydimenziós sorrend helyett egy többdimenziós elhelyezést (pl.: táblázat) keresünk.

Összefoglalás

- $(f, g; \sum w)$-FAS feladat: bal súlyozott kifok korlátos csúcssorrend
  - Polinomiális:
    - csak alsó vagy csak felső korlát
    - $(f, g; h)$-tulajdonságú sorrend feladat csak alsó vagy csak felső korlát
  - NP-teljes:
    - negatív élsúlyozás (nem monoton h_v)
    - egyetlen csúcson alsó és felső korlát
    - $f \equiv g$ korlát
    - $f = a$, $g = \delta - b$ $(a \geq 1, b \geq 2)$: balra legalább a jobbra legalább b él
    - d-távolságú $(-\infty, g)$-FAS feladat „kis” d esetén
- Gráffelbontások
  - Polinomiális
    - befenyves+aciklikus
  - Nyitott
    - befenyő+aciklikus
  - NP-nehéz
    - (teljes) párosítás+aciklikus
    - min költségű befenyves+aciklikus
    - min költségű befenyő+aciklikus
- Rangsorolási feladat
- Ütemezési feladatok
  - $1|g\text{-prec}|L_{max}$
  - $1|g\text{-prec}|f_{max}$