Egyéni kutatómunka 1.
Sztochasztikus Approximáció Hilbert-terekben

Monos Attila
Témavezető: Dr. Csáji Balázs Csanád

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2022. december 22.

Alapvető probléma

- Iterálni szeretnénk, azonban az adataink nem pontosak

Alapvető probléma

- Iterálni szeretnénk, azonban az adataink nem pontosak
- Mérési hiba, mérési zaj – véletlenszerű zajként kezeljük

Alapvető probléma

- Iterálni szeretnénk, azonban az adataink nem pontosak
- Mérési hiba, mérési zaj – véletlenszerű zajként kezeljük
- Iterációs módszerek vizsgálatánál számolni kell a zajjal

Félévi munkásságom

- Megismertem egy alapvető sztochasztikus iterációs algoritmust

Félévi munkásságom

- Megismertem egy alapvető sztochasztikus iterációs algoritmust
- Sztochasztikus gradiens módszer konzisztenciája

Félévi munkásságom

- Megismertem egy alapvető sztochasztikus iterációs algoritmust
- Sztochasztikus gradiens módszer konzisztenciája
- Hilbert-térre való átültetésekre pár példa

Félévi munkásságom

- Megismertem egy alapvető sztochasztikus iterációs algoritmust
- Sztochasztikus gradiens módszer konzisztenciája
- Hilbert-térre való átültetésekre pár példa
- Egy tétel átültetése *(folyamatban)*

Alapmodell I.

- Az alábbi egyenletet szeretnénk megoldani:

$$r \in \mathbb{R}^n, H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad H(r) = r,$$

ahol H egy tetszőleges mérhető függvény

Alapmodell I.

- Az alábbi egyenletet szeretnénk megoldani:

$$r \in \mathbb{R}^n, H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad H(r) = r,$$

ahol H egy tetszőleges mérhető függvény

- Speciális eset:

$$H(r) = r - \nabla f(r)$$

Alapmodell I.

- Az alábbi egyenletet szeretnénk megoldani:

$$r \in \mathbb{R}^n, H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad H(r) = r,$$

  ahol H egy tetszőleges mérhető függvény
- Speciális eset:

$$H(r) = r - \nabla f(r)$$

- Iterációs algoritmus:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t) r_t + \gamma_t H(r_t)$$

Alapmodell I.

- Az alábbi egyenletet szeretnénk megoldani:

$$r \in \mathbb{R}^n, H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad H(r) = r,$$

  ahol H egy tetszőleges mérhető függvény

- Speciális eset:

$$H(r) = r - \nabla f(r)$$

- Iterációs algoritmus:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t) r_t + \gamma_t H(r_t)$$

- Véletlen zaj ehhez az iterációs lépéshez adódik hozzá, így megkapjuk a sztochasztikus iterációt:

Alapmodell II.

- Tfh. $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{N}$, $r_t \in \mathbb{R}^n$, $w_t \in \mathbb{R}^n$ valós valószínűségi vektorváltozó. Ekkor az

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t) r_t + \gamma_t (H(r_t) + w_t)$$

algoritmus *sztochasztikus iteráció (approximáció)*.

Alapmodell II.

- Tfh. $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{N}$, $r_t \in \mathbb{R}^n$, $w_t \in \mathbb{R}^n$ valós valószínűségi vektorváltozó. Ekkor az

$$r_{t+1} = (1-\gamma_t)r_t + \gamma_t(H(r_t) + w_t)$$

algoritmus *sztochasztikus iteráció (approximáció)*.

- γ_t megválasztása izgalmas kérdés
- Érdemes változó lépésközöket alkalmazni úgy, hogy $\gamma_t \to 0$

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r-től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

Egy ismert g függvénnyel.

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r-től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

  Egy ismert g függvénnyel.
- Erre kézenfekvő iteráció:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t) r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r-től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

  Egy ismert g függvénnyel.
- Erre kézenfekvő iteráció:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t) r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

- Sok múlik azon, hogy ismerjük-e Q_r-t, és az mennyire könnyen számolható, ha ismerjük

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r-től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

  Egy ismert g függvénnyel.
- Erre kézenfekvő iteráció:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

- Sok múlik azon, hogy ismerjük-e Q_r-t, és az mennyire könnyen számolható, ha ismerjük
- Robbins-Monro algoritmus:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t g(r_t, \tilde{v}_t)$$

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r-től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

  Egy ismert g függvénnyel.
- Erre kézenfekvő iteráció:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t) r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

- Sok múlik azon, hogy ismerjük-e Q_r-t, és az mennyire könnyen számolható, ha ismerjük
- Robbins-Monro algoritmus:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t) r_t + \gamma_t g(r_t, \tilde{v}_t)$$

- $$H(r_t) = \mathbb{E}[g(r_t, v_t)], \quad w_t = g(r_t, \tilde{v}_t - \mathbb{E}[g(r_t, v_t)]$$

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r-től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

  Egy ismert g függvénnyel.

- Erre kézenfekvő iteráció:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t) r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

- Sok múlik azon, hogy ismerjük-e Q_r-t, és az mennyire könnyen számolható, ha ismerjük
- Robbins-Monro algoritmus:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t) r_t + \gamma_t g(r_t, \tilde{v}_t)$$

- $$H(r_t) = \mathbb{E}[g(r_t, v_t)], \quad w_t = g(r_t, \tilde{v}_t - \mathbb{E}[g(r_t, v_t)]$$
- Ha van ilyen forma, akkor feltehető, hogy $\mathbb{E}(w_t) = 0$

A Tétel I.

- Ha $\gamma_t^2 \not\to 0$, akkor nem biztos, hogy betartunk az r^* megoldásba

A Tétel I.

- Ha $\gamma_t^2 \not\to 0$, akkor nem biztos, hogy betartunk az r^* megoldásba
- Viszont ha $s_t = H(r_t) - r_t + w_t$ korlátos, akkor korlátos halmazban mozoghatunk

A Tétel I.

- Ha $\gamma_t^2 \not\to 0$, akkor nem biztos, hogy betartunk az r^* megoldásba
- Viszont ha $s_t = H(r_t) - r_t + w_t$ korlátos, akkor korlátos halmazban mozoghatunk
- Feltéve, hogy minden $t \in \mathbb{N}$-re γ_t koordinátái megegyeznek, filtráció:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{r_0, \dots, r_t, s_0, \dots, s_{t-1}, \gamma_0, \dots, \gamma_t\}$$

Theorem

Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{N}} > 0$, *továbbá*

1. $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t = \infty, \qquad \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t^2 < \infty$
2. $\forall r \in \mathbb{R}^n \colon f(r) \geq 0$
3. ∇f *Lipschitz-folytonos, azaz* $\exists L \geq 0$, *hogy* $\forall r, s \in \mathbb{R}^n$: $\|\nabla f(r) - \nabla f(s)\| \leq L\|r - s\|$
4. $\exists c > 0$, *hogy* $\forall t \in \mathbb{N}$: $c \cdot \|\nabla f(r_t)\|^2 \leq \langle -\nabla f(r_t), \mathbb{E}[s_t|\mathcal{F}_t]\rangle$
5. $\exists K_1, K_2 > 0$, *hogy* $\forall t \in \mathbb{N}$: $\mathbb{E}\left[\|s_t\|^2|\mathcal{F}_t\right] \leq K_1 + K_2\|\nabla f(r_t)\|^2$

Ekkor az alábbiak 1 valószínűséggel igazak az $r_{t+1} = r_t + \gamma_t s_t$ *iterációra:*

1. *Az* $f(r_t)$ *sorozat konvergens,*
2. $\lim_{t\to\infty} \nabla f(r_t) = 0$,
3. r_t *torlódási pontjai stacionárius pontjai* ∇f*-nek.*

Sztochasztikus gradiens módszer konzisztenciája

- Ha f szinthalmazai korlátosak, és f csak r^*-ban stacionárius, akkor $r_t \to r^*$ 1 valószínűséggel

Sztochasztikus gradiens módszer konzisztenciája

- Ha f szinthalmazai korlátosak, és f csak r^*-ban stacionárius, akkor $r_t \to r^*$ 1 valószínűséggel
- $$r_{t+1} = r_t - \gamma_t(\nabla f(r_t) + w_t) \Rightarrow s_t = -\nabla f(r_t) - w_t$$

Sztochasztikus gradiens módszer konzisztenciája

- Ha f szinthalmazai korlátosak, és f csak r^*-ban stacionárius, akkor $r_t \to r^*$ 1 valószínűséggel
- $$r_{t+1} = r_t - \gamma_t(\nabla f(r_t) + w_t) \Rightarrow s_t = -\nabla f(r_t) - w_t$$
- Feltesszük még:

$$\mathbb{E}[w_t|\mathcal{F}_t] = 0, \quad \mathbb{E}\left[\|w_t\|^2|\mathcal{F}_t\right] \leq A + B\|\nabla f(r_t)\|^2$$

- Ha f szinthalmazai korlátosak, és f csak r^*-ban stacionárius, akkor $r_t \to r^*$ 1 valószínűséggel
- $$r_{t+1} = r_t - \gamma_t(\nabla f(r_t) + w_t) \Rightarrow s_t = -\nabla f(r_t) - w_t$$
- Feltesszük még:

$$\mathbb{E}[w_t|\mathcal{F}_t] = 0, \quad \mathbb{E}\left[\|w_t\|^2|\mathcal{F}_t\right] \leq A + B\|\nabla f(r_t)\|^2$$

- Alábbi választásokkal a tétel alkalmazható:

$$c = 1, \quad K_1 = A, \quad K_2 = B + 1$$

Hilbert-térbeli tételek I.

Legyen$n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [0;1)$, $a_n \to 0$, de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, továbbá tetszőleges n-re

$$\beta_n = \frac{1}{(1-a_n)\cdot(1-a_1)}, \quad \gamma_n = a_n\beta_n$$

Hilbert-térbeli tételek II.

Theorem

Legyen $\mathcal{H}$ *egy Hilbert-tér,* $F : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *alulról korlátos és legyen a Fréchet-deriváltja* $\mathrm{D}F$, *továbbá* $X_n, W_n, H_n, V_n \in \mathcal{H}$ *tetszőleges n-re úgy, hogy*

$$X_{n+1} = X_n - a_n(\mathrm{D}F(X_n) - W_n), \quad W_n = H_n + V_n$$

Tegyük fel, hogy

1. $\mathrm{D}F$ *Lipschitz, azaz* $\exists K > 0 \colon \forall x, y \in \mathcal{H} \colon \|\mathrm{D}F(x) - \mathrm{D}F(y)\| \leq K\|x - y\|$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|H_n\|^2 < \infty$
3. $\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k V_k \to \infty$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \|\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k V_k\|^2 < \infty$

Ekkor $F(X_n)$ *konvergens,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|\mathrm{D}F(X_n)\|^2 < \infty$ *és* $\mathrm{D}F(X_n) \to 0$.

Hilbert-térbeli tételek III.

Theorem

Legyen $\mathcal{H}$ egy valós, szeparábilis Hilbert-tér a Borel σ-algebrával ellátva, és $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mérhető. Tegyük fel, hogy $\vartheta \in \mathcal{H}$, X_n, W_n, H_n, V_n $\mathcal{H}$-értékű valószínűségi változók úgy, hogy
$X_{n+1} = X_n - a_n(f(X_n) - W_n), \quad W_n = H_n + V_n,$
ahol $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, továbbá

1. $\exists c > 0\colon \forall x \in \mathcal{H}\colon \|f(x)\| \leq c(1 + \|x\|)$
2. $\forall K \geq 1\colon \inf\{\langle f(x), x - \vartheta\rangle | x \in \mathcal{H}, \frac{1}{K} \leq \|x - \vartheta\| \leq K\} > 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$ H_n, V_n *négyzetesen integrálhatóak, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\|H_n\| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \mathbb{E}\|H_n\|^2 < \infty,$$

$$\mathbb{E}(V_n | X_1, H_1, V_1, \ldots, H_{n-1}, V_{n-1}) = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \mathbb{E}\|V_n\|^2 < \infty$$

Ekkor $X_n \to \vartheta$ 1 valószínűséggel.

Irodalom

- D. P. Bertsekas - J. N. Tsitsikilis *Neuro-Dynamic Programming, p.* 132-142 (Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1996)
- L. Jung - G. Pflug - H. Walk *Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems, p.* 1-22 (Springer, 1992)
- Cs. Szepesvári, M. Littmann *A Unified Analysis of Value-Function-Based Reinforcement-Learning Algorithms, p.* 8 (Neural Computation (1999) 11 (8): 2017–2060)
- Vivek S. Borkar *Stochastic Approximation, A Dynamical Systems Viewpoint* (Springer, 2008)
- H. Kushner, G. G. Yin *Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications* (Springer, 2. kiadás, 2003)