Kombinatorikus merevség és alkalmazásai

Villányi Soma
Témavezető: Jordán Tibor

A félév során a gráfok merevségelméletével, ezen belül csúcspárok globális lazaságával foglalkoztam. A $G = (V, E)$ gráfban az $u, v \in V$ csúcspárt akkor nevezzük globálisan lazának, ha G minden generikus $p : V \to \mathbb{R}^d$ realizációjához van olyan vele ekvivalens $q : V \to \mathbb{R}^d$ realizáció, amelyre $||p(u) - p(v)|| \neq ||q(u) - q(v)||$. A félév során elért legfontosabb eredmény, hogy $d = 2$ mellett polinomiális időben tesztelhető, hogy egy csúcspár globálisan laza-e. A fogalommal kapcsolatban számos további kérdés merült fel, amelyek közül néhányat sikerült részlegesen megválaszolni.

1. Bevezetés

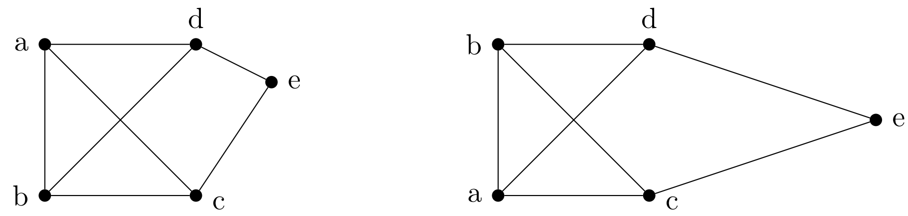
Legyen d pozitív egész szám. A (G, p) párt a $G = (V, E)$ gráf egy $\mathbb{R}^d$-beli realizációjának nevezzük, ha $p : V \to \mathbb{R}^d$ függvény. A (G, p) és a (G, q) realizációk ekvivalensek, ha minden $uv \in E$ esetén $||p(u)-p(v)|| = ||q(u)-q(v)||$. A két realizáció kongruens, ha a $||p(u)-p(v)|| = ||q(u)-q(v)||$ egyenlőség minden $u, v \in V$ párra teljesül. Ez ekvivalens azzal, hogy $q = \phi \circ p$ az $\mathbb{R}^d$ tér valamilyen ϕ kongruenciájára. Egy (G, p) realizáció globálisan merev, ha minden (G, p)-vel ekvivalens realizáció kongruens vele. (G, p) merev, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy ha (G, q) egy (G, p)-vel ekvivalens realizáció, és minden $v \in V$-re teljesül, hogy $||p(v)-q(v)|| < \varepsilon$, akkor (G, q) és (G, p) kongruensek. Egy realizációról NP-nehéz eldönteni azt, hogy (globálisan) merev-e. Azonban a feladat kezelhetőbbé válik, ha feltesszük, hogy a realizáció pontjainak koordinátái között nincsen algebrai összefüggés.

A (G, p) realizáció generikus, ha az a halmaz, amely a $p(v)$, $v \in V$ pontok koordinátáit tartalmazza, algebrailag független $\mathbb{Q}$ fölött. Ismert, hogy a merevség és a globális merevség generikus tulajdonságok, azaz ha G-nek van generikus (globálisan) merev realizációja $\mathbb{R}^d$-ben, akkor minden generikus realizációja (globálisan) merev $\mathbb{R}^d$-ben. Ennek megfelelően egy gráfot (globálisan) merevnek nevezünk $\mathbb{R}^d$-ben, ha minden generikus realizációja (globálisan) merev, vagy ezzel ekvivalensen, ha létezik (globálisan) merev generikus realizációja. Egy gráf minimálisan (globálisan) merev $\mathbb{R}^d$-ben, ha (globálisan) merev, de tetszőleges élét elhagyva a gráf már nem (globálisan) merev.

Könnyen bebizonyítható, hogy az $\mathbb{R}$ egyenesen egy gráf akkor és csak akkor merev, ha összefüggő, és akkor és csak akkor globálisan merev, ha 2-összefüggő. A merevség és a globális merevség karakterizációja $d \geq 3$ mellett nyitott probléma. Azonban ha $d = 2$, akkor mindkét tulajdonság polinomiális időben tesztelhető. A merevségre vonatkozó eredmény Lovásztól és Yeminitől [2], a globális merevségre vonatkozó eredmény Jacksontól és Jordántól származik [3].

A $G = (V, E)$ gráf (G, p) realizációjában az $u, v \in V$ csúcsokat globálisan linkeltnek nevezzük, ha a $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$ egyenlőség minden (G, p)-vel ekvivalens (G, q) realizációra teljesül. Tehát egy (G, p) realizáció akkor globálisan merev, ha minden $u, v \in V$ csúcspár globálisan linkelt. A globális linkeltség azonban nem generikus tulajdonság (lásd 1. ábra).

Az u, v csúcspárt globálisan linkeltnek nevezzük, ha G minden generikus realizációjában u és v globálisan linkelt, gyengén globálisan linkeltnek nevezzük, ha G-nek van olyan generikus realizációja, amelyben u és v globálisan linkelt, végül globálisan lazának nevezzük, ha G semelyik generikus realizációjában sem globálisan linkelt. Tehát egy csúcspár akkor és csak



1. ábra. Ugyanannak a gráfnak két különböző realizációja. A bal oldali realizációban (c, d) globálisan linkelt. A jobb oldali realizációban (c, d) nem globálisan linkelt, mert ha a d csúcsot az ab egyenesre tükrözzük, akkor az e csúcs pozíciójának alkalmas megváltoztatásával, egy ekvivalens realizációhoz jutunk.

akkor gyengén globálisan linkelt, ha nem globálisan laza. A következő néhány eredmény a globálisan laza csúcspárok és a globális merevség közötti kapcsolatot mutatja. Egy globálisan merev gráfban az e élt kritikusnak nevezzük, ha $G - e$ nem globálisan merev.

1.1. Tétel. *[1] Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $uv \notin E$, és hogy G-nek létezik olyan szupergráfja, amelyben az uv él kritikus. Ekkor (u, v) globálisan laza G-ben.*

Ha (u, v) egy G gráfban globálisan laza, akkor minden részgráfjában is globálisan laza, ezért a fenti tételből egyszerűen következik az alábbi állítás.

1.2. Tétel. *A $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor globálisan merev, ha nem tartalmaz globálisan laza csúcspárt.*

Az alábbi egyszerű állítás hasznos lehet, ha egy gráf globális merevségét szeretnénk bizonyítani.

1.3. Tétel. *$G = (V, E)$. Jelölje $J \subset (V \times V) - E$ a nem szomszédos, gyengén globálisan linkelt csúcspárok halmazát. Ekkor*

- *$uv \in J$ esetén G akkor és csak akkor globálisan merev, ha $G + uv$ globálisan merev;*
- *G akkor és csak akkor globálisan merev, ha $G' = (V, E \cup J)$ globálisan merev.*

2. Globálisan laza csúcspárok kombinatorikus karakterizációja a síkon

Ennek a szakasznak a célja azoknak az eredményeknek az ismertetése, amelyek szükségesek a globális lazaság polinomiális idejű teszteléséhez a síkon. Az eredmények $\mathbf{d = 2}$ mellett értendők. (A 2.1 alszakasz eredményei magasabb dimenzióban is érvényesek.)

2.1. Globálisan laza csúcspárok és gráfműveletek

Az algoritmus során kulcsfontosságú, hogy bizonyos gráfműveletek megőrzik egy csúcspár globális lazaságát, illetve gyenge globális linkeltségét. Erről szólnak az alábbi lemmák.

2.1. Lemma. *$G=(V,E)$, $V_0 \subset V$, $G[V_0]=(V_0,E_0)$ merev, $u,v \in V_0$. Tegyük fel, hogy $e=(s_1,s_2) \notin E_0$ és (u,v) gyengén globálisan linkelt a G/e gráfban. Ekkor (u,v) gyengén globálisan linkelt G-ben.*

2.2. Lemma. *$G=(V,E)$, $V_0 \subset V$, $G[V_0]$ merev, $u,v \in V_0$. Tegyük fel, hogy V_1 egy komponens csúcshalmaza a $G-V_0$ gráfban, és (u,v) globálisan laza a G/V_1 gráfban. Ekkor (u,v) globálisan laza G-ben.*

A fenti két lemmának egyszerű következménye az alábbi állítás.

2.3. Következmény. *$G=(V,E)$, $V_0 \subset V$, $G_0=G[V_0]$ merev, $u,v \in V_0$. Tegyük fel, hogy $e=(s_1,s_2) \in E$, $s_1,s_2 \notin V_0$. Ekkor (u,v) pontosan akkor globálisan laza a G/e gráfban, ha globálisan laza G-ben.*

A 2.1 Lemma elégséges feltételt ad arra, hogy egy (u,v) pár gyengén globálisan linkelt. Ha a lemmában szereplő operációknak egy sorozatával egy globálisan merev gráfhoz jutunk, akkor a kapott gráfban az (u,v) gyengén globálisan linkelt, ezért az (u,v) az eredeti gráfban is gyengén globálisan linkelt. Példaként vegyük az 1. ábra gráfját, vizsgáljuk meg, hogy (c,d) globálisan laza-e. A gráfban összehúzhatjuk a de élt, mert az a,b,c és d csúcsok által feszített részgráf merev. A kapott gráf K_4-gyel izomorf, ami globálisan merev, ezért (c,d) gyengén globálisan linkelt az eredeti gráfban.

Látni fogjuk, hogy ez a feltétel szükséges is: Ha az (u,v) pár gyengén globálisan linkelt, akkor létezik a 2.1 Lemmában szereplő operációknak egy olyan sorozata, amely globálisan merev gráfot eredményez.

2.2. Globálisan laza csúcspárok jellemzése

Az előző alszakaszban láttuk, hogy egy merev részgráfon kívül eső komponens összehúzása nem befolyásolja azt, hogy a merev részgráf két csúcsa globálisan laza-e. Ennek segítségével 3-összefüggő gráfokban jellemezhetők a globálisan laza csúcspárok.

2.4. Tétel. *Legyen $G=(V,E)$ 3-összefüggő gráf, $u,v \in V$. Tegyük fel, hogy G-nek van $\{u,v\}$-t tartalmazó merev részgráfja, legyen G_0 egy tartalmazásra nézve minimális $\{u,v\}$-t tartalmazó merev részgráf. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

1) *Az (u,v) csúcspár nem globálisan laza G-ben.*

2) *Ha $G-G_0$ komponenseinek csúcshalmazai $\{V_1,\dots,V_s\}$, akkor $G/V_1/\dots/V_s$ globálisan merev.*

3) *Létezik olyan $\{u,v\}$-t tartalmazó merev $G_0=(V_0,E_0)$ részgráf, és $(e_1,\dots e_k) \subset E[G-V_0]$, melyre (u,v) nem globálisan laza a $G/e_1/\dots/e_k$ gráfban.*

Az alábbi tételt az algoritmus során arra használjuk, hogy az általános esetet visszavezessük a 3-összefüggő esetre.

2.5. Tétel. *Legyen $G=(V,E)$ merev, 2-összefüggő gráf, $\{a,b\}$ szeparáló csúcspár. Tegyük fel, hogy $a,b \in V_0$, $V_0-\{a,b\}$ a $G-a-b$ gráf egy komponensének csúcshalmaza, és $u,v \in V_0$ két különböző csúcs. Ekkor az (u,v) akkor és csak akkor globálisan laza G-ben, ha globálisan laza a $G[V_0]+ab$ gráfban.*

Az algoritmus során szükség van még az alábbi állításra.

2.6. Lemma. *$G=(V,E)$, $u,v \in V$. Tegyük fel, hogy G-nek nincs $\{u,v\}$-t tartalmazó merev részgráfja. Ekkor (u,v) globálisan laza.*

2.3. Algoritmus globális lazaság eldöntésére

Az algoritmus során szükség van tartalmazásra minimális $\{u,v\}$-t tartalmazó merev részgráf keresésére. Ez a következőképpen lehetséges. Keressünk egy $\{u,v\}$-t tartalmazó merev részgráfot, ezt jelölje R. Ennek minden e élére megnézzük, hogy az $R-e$ gráfban az u és v csúcsok ugyanabban az R' merev komponensben vannak-e. Ha igen, akkor R'-vel folytatjuk az algoritmust. Ha ez egyik élre sem teljesül, akkor R tartalmazásra minimális $\{u,v\}$-t tartalmazó merev részgráf.

Algoritmus globális lazaság eldöntésére:

1. lépés. Ha u,v nem ugyanabban a 2-összefüggő komponensben van, akkor (u,v) globálisan laza. Különben szorítkozhatunk u,v 2-összefüggő komponensére.

2. lépés. Keressünk egy $\{u,v\}$-t tartalmazó merev G_0 részgráfot. Ha nincs ilyen, akkor 2.6 alapján (u,v) globálisan laza. Ha van, akkor módosítsuk G-t úgy, hogy összhúzzuk a G_0-on kívül eső komponenseket. 2.3 szerint a kapott gráfban (u,v) akkor és csak akkor globálisan laza, ha az eredetiben is az volt.

3. lépés. Amíg G nem 3-összefüggő: Keressünk egy x,y szeparátort. Ha szeparálják u-t és v-t, akkor (u,v) globálisan laza. Ha nem, akkor dobjuk el a gráfból $G-x-y$ azon komponenseit, amelyek nem tartalmazzák u-t és v-t, és vegyük hozzá a gráfhoz az xy élt. 2.5 szerint a kapott gráfban (u,v) akkor és csak akkor globálisan laza, ha az eredetiben is az volt.

4. lépés. Keressünk egy tartalmazásra minimális u,v-t tartalmazó merev G_0 részgráfot. Ha nincs ilyen, akkor 2.6 alapján (u,v) globálisan laza. Ha van, akkor módosítsuk G-t úgy, hogy összehúzzuk a G_0-on kívül eső komponenseket.

5. lépés. A kapott gráfról döntsük el, hogy globálisan merev-e. 2.4 szerint akkor és csak akkor globálisan merev, ha (u,v) nem globálisan laza.

Megjegyzés. Ha G 3-összefüggő, akkor az első 3 lépés elhagyható.

3. Globálisan laza csúcshalmazok

A globális lazaság kettőnél nagyobb méretű csúcshalmazokra is definiálható.

3.1. Definíció. A $G=(V,E)$ gráfban a $V_0 \subset V$ csúcshalmaz globálisan laza, ha minden generikus (G,p) realizációhoz van olyan vele ekvivalens (G,q) realizáció, amire $p|_{V_0}$ és $q|_{V_0}$ inkongruens.

A 1.2 Tétel szerint V-re $\mathbb{R}^d$-ben teljesül, hogy akkor és csak akkor globálisan laza, ha tartalmaz $u,v \in V$ globálisan laza csúcspárt. Ez $\mathbb{R}^2$-en 3-összefüggő gráfokra tetszőleges $V_0 \subset V$ csúcshalmazra teljesül.

3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $G=(V,E)$ 3-összefüggő. Egy $V_0 \subset V$ csúcshalmaz akkor és csak akkor globálisan laza $\mathbb{R}^2$-en, ha tartalmaz $u,v \in V_0$ globálisan laza csúcspárt.*

3.3. Sejtés. Tetszőleges $G=(V,E)$ gráfban egy $V_0 \subset V$ csúcshalmaz akkor és csak globálisan laza $\mathbb{R}^d$-ben, ha tartalmaz $u,v \in V_0$ globálisan laza csúcspárt.

4. További kérdések és állítások a globálisan laza csúcspárokról

4.1. Kérdés. Mely gráfokra teljesül, hogy ha $(u, v) \notin E$, akkor (u, v) globálisan laza?

Ezt a kérdést a minimálisan merev gráfok esetében sikerült megválaszolni. Nevezzük két gráf 2-ragasztásának (illetve 3-ragasztásának) azt a gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy a két gráf diszjunkt uniójában a két gráf egy-egy K_2-vel (illetve K_3-mal) izomorf részgráfját azonosítjuk. Két merev gráf 2- vagy 3-ragasztása merev és két minimálisan merev gráf 2- vagy 3-ragasztása minimálisan merev. Nevezzünk egy gráfot speciálisnak, ha minimálisan merev és minden merev valódi részgráfja teljes.

4.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $G = (V, E)$ minimálisan merev gráf. A következő állítások ekvivalensek.*

1) G két csúcsa akkor és csak akkor globálisan laza $\mathbb{R}^2$-en, ha nem vezet köztük él.

2) G előáll speciális gráfok ismételt 2- és 3-ragasztásaként.

Egy gráfot telített nem globálisan merev (SNGR) gráfnak hívunk, ha nem globálisan merev, de két tetszőleges nem szomszédos csúcsot összekötve, a kapott gráf globálisan merev.

4.3. Sejtés. Tegyük fel, hogy $G = (V, E)$ merev gráf. A következő állítások ekvivalensek.

1) G két csúcsa akkor és csak akkor globálisan laza $\mathbb{R}^2$-en, ha nem vezet köztük él.

2) G nem tartalmaz $(K_5 - e)$-vel izomorf feszített részgráfot, és előáll 3-összefüggő SNGR gráfok és teljes gráfok ismételt klikkragasztásaként.

Az alábbi tétel a 2.6 Lemma általánosítása, és elégséges feltételt ad egy csúcspár globális lazaságára.

4.4. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ nem globálisan merev gráf, $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy nem létezik olyan $\mathbb{R}^2$-en merev G_0 valódi feszített részgráfja G-nek, amelyre $u, v \in V[G_0]$. Ekkor (u, v) globálisan laza $\mathbb{R}^2$-en.*

Az alábbi tétel szerint az 1.1 Tételnek a megfordítása is igaz $\mathbb{R}^2$-en 3-összefüggő gráfokban.

4.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $G = (V, E)$ 3-összefüggő gráf, $u, v \in V$. $\mathbb{R}^2$-en (u, v) akkor és csak akkor globálisan laza G-ben, ha G-nek van olyan globálisan merev szupergráfja, amiben uv kritikus.*

4.6. Sejtés. Legyen $G = (V, E)$ egy $(d + 1)$-összefüggő gráf, $u, v \in V$. $\mathbb{R}^d$-ben (u, v) akkor és csak akkor globálisan laza G-ben, ha G-nek van olyan globálisan merev szupergráfja, amiben uv kritikus.

Hivatkozások

[1] B. Jackson, T. Jordan, & Z. Szabadka. Globally Linked Pairs of Vertices in Equivalent Realizations of Graphs, *Discrete Comput Geom* **35**, 493-512 (2006).

[2] L. Lovász, Y. Yemini. On generic rigidity in the plane, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **2**(1), pp. 91-98 (1982).

[3] B. Jackson, T. Jordan. Connected rigidity matroids and unique realization graphs, *J. Combin. Theory Ser.* B, **94**, pp. 177-203 (2005).