Kombinatorikus merevség és alkalmazásai - Globálisan laza csúcspárok

Villányi Soma
Témavezető: Jordán Tibor

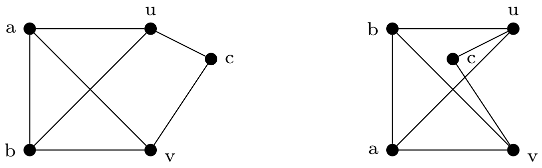
2022. december 22.

Alapfogalmak

A (G,p) párt a $G=(V,E)$ gráf (egy $\mathbb{R}^2$-beli) realizációjának nevezzük, ha $p:V\to\mathbb{R}^2$ függvény.

(G,p) és (G,q) **ekvivalens**, ha minden $uv\in E$ esetén $||p(u)-p(v)||=||q(u)-q(v)||$.

(G,p) és (G,q) **kongruens**, ha minden $u,v\in V$ csúcspárra $||p(u)-p(v)||=||q(u)-q(v)||$.



Ugyanannak a gráfnak két ekvivalens, de inkongruens realizációja.

(G,p) **globálisan merev**, ha minden (G,p)-vel ekvivalens realizáció kongruens (G,p)-vel.

(G,p) **merev**, ha létezik olyan $\varepsilon>0$, hogy ha (G,q) egy (G,p)-vel ekvivalens realizáció, és minden $v\in V$-re teljesül, hogy $||p(v)-q(v)||<\varepsilon$, akkor (G,q) és (G,p) kongruensek.

Alapfogalmak

Egy realizációról NP-nehéz eldönteni, hogy (globálisan) merev-e.

Segít, ha feltesszük, hogy a realizáció "kellően általános helyzetű".

A (G, p) realizáció **generikus**, ha az a halmaz, amely a $p(v)$ $(v \in V)$ pontok koordinátáit tartalmazza, algebrailag független $\mathbb{Q}$ fölött.

A merevség és a globális merevség generikus tulajdonságok:

G-nek van (globálisan) merev generikus realizációja $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ G-nek minden generikus realizációja (globálisan) merev

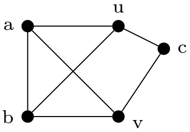
Ekkor G-t (globálisan) merevnek nevezzük.

Egy gráf (globális) merevsége polinomiális időben tesztelhető a síkon!

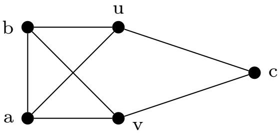
Globálisan linkelt csúcspárok egy gráf realizációjában

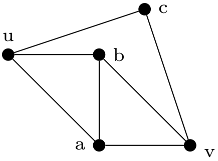
A (G, p) realizációban az $u, v \in V$ csúcsokat globálisan linkeltnek nevezzük, ha $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$ minden (G, p)-vel ekvivalens (G, q) realizációra.

Ebben a realizációban (u, v) globálisan linkelt:



Ebben a realizációban (u, v) nem globálisan linkelt:





$\Rightarrow$ Két csúcs globális linkeltsége nem generikus tulajdonság.

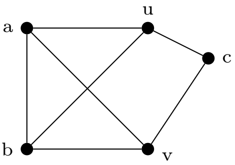
Globálisan linkelt és globálisan laza csúcspárok egy gráfban

A G gráfban az (u, v) csúcspár

globálisan linkelt, ha G **minden** generikus realizációjában u és v globálisan linkelt;

gyengén globálisan linkelt, ha G-nek **létezik** olyan generikus realizációja, amiben u és v globálisan linkelt;

globálisan laza, ha G-nek **nem létezik** olyan generikus realizációja, amiben u és v globálisan linkelt.



Ebben a gráfban (a, b) globálisan linkelt, (u, v) gyengén globálisan linkelt, (a, c) globálisan laza.

Globálisan laza csúcspárok és globális merevség kapcsolata

Tétel

Egy gráf akkor és csak akkor globálisan merev, ha nem tartalmaz globálisan laza csúcspárt.

Tétel

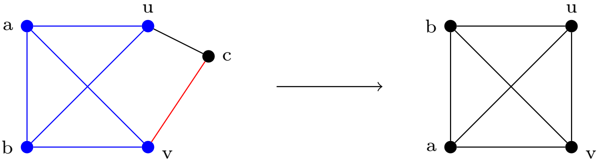
Tegyük fel, hogy a G gráfban (u, v) egy nem szomszédos gyengén globálisan linkelt csúcspár. Ekkor G akkor és csak akkor globálisan merev, ha $G + uv$ globálisan merev.

Cél: globálisan laza csúcspárok jellemzése

Globálisan laza csúcspárok és gráfműveletek

Lemma

Legyen G gráf, $G_0 \leq G$ merev feszített részgráf, $u, v \in V[G_0]$. Tegyük fel, hogy $e \notin E[G_0]$ és (u, v) gyengén globálisan linkelt a G/e gráfban. Ekkor (u, v) gyengén globálisan linkelt G-ben.



$\Rightarrow$ (u, v) gyengén globálisan linkelt

Legyen u és v rögzített. Ha a lemmában szereplő operációknak egy sorozatával egy globálisan merev gráfhoz jutunk, akkor (u, v) gyengén globálisan linkelt.

Ennek a megfordítása is igaz. Ezt a következő dián látni fogjuk 3-összefüggő gráfokra.

Tétel

Tegyük fel, hogy G-nek nincs $\{u, v\}$-t tartalmazó merev részgráfja. Ekkor (u, v) globálisan laza G-ben.

Tétel

Legyen $G = (V, E)$ 3-összefüggő gráf, $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy G-nek van $\{u, v\}$-t tartalmazó merev részgráfja, legyen G_0 egy tartalmazásra nézve minimális $\{u, v\}$-t tartalmazó merev részgráf. Legyenek a $G - G_0$ gráf komponenseinek csúcshalmazai $V_1, \ldots, V_s$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1) *Az (u, v) csúcspár nem globálisan laza G-ben.*
2) *$G/V_1/\ldots/V_s$ globálisan merev.*

Ez egy polinomális időben tesztelhető karakterizáció.