Elliptikus PDE-k véges differenciás numerikus megoldása 3D tartományokon

Témavezető: Karátson János

Andó-Kinorányi Dóra

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Önálló Projektmunka II.

2022.12.22.

Bevezetés

- Poisson-egyenlet Dirichlet-peremfeltétellel
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos tartomány,
- $\partial\Omega$ szakaszonként sima határ.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u\big|_{\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

Motiváció

- $W \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ vektortér
- *Megmaradási törvény*: $\operatorname{div} W = f$.
- *Fick-törvény*: $W = -p\nabla u$, $p > 0$ konstans.
- A fenti szabályok a $-\operatorname{div}(p\nabla u) = f$ elliptikus egyenletre vezetnek.
- Ha $p \equiv 1$, akkor ez megegyezik az $-\Delta u = f$ elliptikus egyenlettel.

A véges differenciás módszer

- Rács, lépésközök:h_1, h_2, h_3.
- Ha ekvidisztáns a rács, akkor a $h := h_1 = h_2 = h_3$ a rács paramétere.
- A diszkrét Laplace-operátor közelítése:

$$-\Delta u(ih, jh, kh) \approx$$

$$\frac{-u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k} - u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k} - u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1} + 6u_i, j, k}{h^2}$$

Egységkocka

A vizsgált tartomány: $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ egységkocka.
Feladat:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ f(x,y,z) = 3\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \end{cases}$$

A pontos megoldás $u(x,y,z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$.
$A_h u_h = f_h$ lineáris algebrai egyenletrendszer.

Az A_h együtthatómátrix struktúrája

$$E := \begin{pmatrix} 6 & -1 & & & \\ -1 & 6 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 6 & -1 \\ & & & -1 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{tridiag}(-1, 6, -1) \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

$$\tilde{B} := \left(\begin{array}{c|c|c|c} E & -I_N & & \\ \hline -I_N & \ddots & \ddots & \\ \hline & \ddots & E & -I_N \\ \hline & & -I_N & E \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$$

$$A_h := \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{B} & -I_{N^2} & & \\ \hline -I_{N^2} & \ddots & \ddots & \\ \hline & \ddots & \tilde{B} & -I_{N^2} \\ \hline & & -I_{N^2} & \tilde{B} \end{array}\right) = \frac{1}{h^2} \operatorname{blokktridiag}(-I_{N^2}, \tilde{B}, -I_{N^2}) \in \mathbb{R}^{N^3 \times N^3}$$

Az együtthatómátrix struktúrája

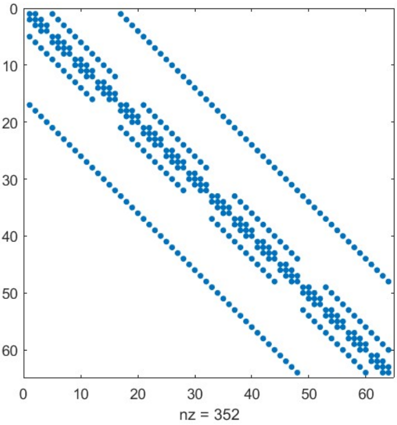


Figure 1: Az együtthatómátrix struktúrája kockán, $N = 4$ mellett.

A közelítő megoldás ábrázolása

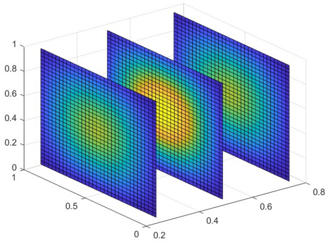


Figure 2: Az $N = 32$ melletti becsült értékek az $x = 8h$, $x = 16h$, $x = 24h$ rétegeken.

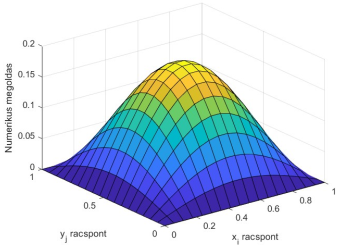
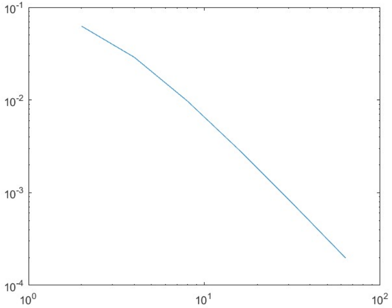


Figure 3: A $z = h$, $N = 16$ melletti becsült értékek.

A becslési hiba nagysága különböző lépéstávolságok esetén

Belső rácspontok száma (N)	Hiba nagysága
2	0.0628
4	0.0289
8	0.0098
16	0.0028
32	$7.5303 \cdot 10^{-4}$
64	$1.9452 \cdot 10^{-4}$



A gradiens közelítése

kocka határán: $|\nabla u| \approx |\partial_\nu u|$
A 6. ábrához tartozó feladat: $f(x,y,z) = 3e^{-10(x-0).^2-10(y-0).^2-10(z-1).^2} + e^{-10(x-0.8).^2-10(y-0.7).^2-10(z-1).^2}$

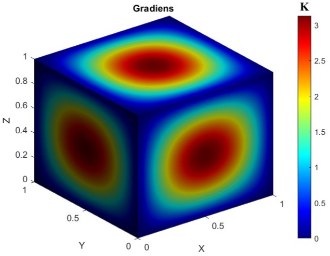


Figure 5: $|\nabla u|$ közelítése a határon az eredeti feladat esetén.

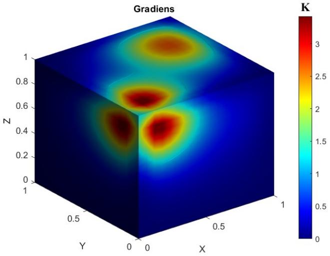


Figure 6: A közelített $|\nabla u|$ kettős Gauss-forrás esetén.

Hiányos kocka konkáv sarokkal (Fichera corner)

Egy olyan 1 élhosszúságú kocka, melynek az egyik sarkából elhagytunk egy $\frac{1}{2}$ élhosszúságú kockát.

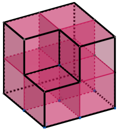


Figure 7: Hiányos kocka konkáv sarokkal (Fichera corner).

Az együtthatómátrix struktúrája - a C segédmátrix

Jelölések: Legyen $a = sN + (N - s)s$, ahol $s = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{B} & -I & & \\ \hline -I & \tilde{B} & \ddots & \\ \hline & \ddots & \ddots & -I \\ \hline & & -I & \tilde{B} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$$

$\tilde{B} = \text{tridiag}(-1, 6, -1) \in \mathbb{R}^{N \times N}$

Az együtthatómátrix struktúrája - a D segédmátrix

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & N \quad (1.) & N \quad (s.) & s & s & s \\
\hline
N & \tilde{B} & -I & & & \\
\hline
N & -I & \tilde{B} & A_2' & & \\
\hline
s & & A_1' & \hat{B} & -I & \\
\hline
s & & & -I & \hat{B} & -I \\
\hline
s & & & & -I & \hat{B}
\end{array} = D
$$

$$\tilde{B} = \text{tridiag}(-1, 6, -1) \in \mathbb{R}^{N \times N}, \ \hat{B} = \text{tridiag}(-1, 6, -1) \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

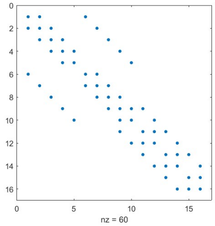


Figure 8: A D mátrix struktúrája $N = 5$ mellett.

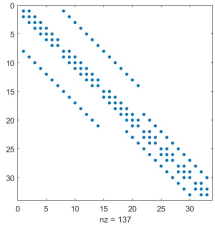


Figure 9: A D mátrix struktúrája $N = 7$ mellett.

Az együtthatómátrix struktúrája - az A segédmátrix

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & N^2 \quad (1.) & N^2 \quad (s.) & a & a & a \\
\hline
N^2 & \mathrm{C} & \text{-I} & & & \\
\hline
N^2 & \text{-I} & \mathrm{C} & A_2 & & \\
\hline
a & & A_1 & D & -I & \\
\hline
a & & & -I & D & -I \\
\hline
a & & & & -I & D
\end{array}
= A
$$

$$A_2 = A_1^T$$

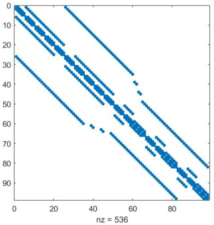


Figure 10: Az A mátrix struktúrája $N = 5$ mellett.

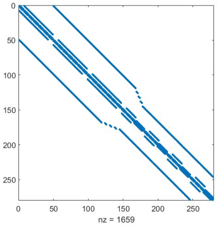


Figure 11: Az A mátrix struktúrája $N = 7$ mellett.

A módszer együtthatómátrixa $A_h = \frac{1}{h^2} A$.

Futtatási eredmények

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ f(x,y,z) = 12\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z) \end{cases}$$

Belső rácspontok száma (N)	Hiba nagysága
3	0.2337
5	0.0628
7	0.0530
9	0.0289
11	0.0232
15	0.0130
17	0.0098
19	0.0083
21	0.0066
25	0.0048